Program Submittal

USERS' CLUB EUROPE

SPANISH LANGUAGE

■ New Program

☐ Revision to Program No.

HP-67 Serial No. 1704S02244 HP-97 Serial No.

Program Title (Underline 1 or 2 Keywords): 67 - SUMACION DE SERIES INFINITAS ALTERNADAS

Keyword(s) (Underlined in Title):
1. SUMACION
2. SERIES

No. of Steps: 183

Category No.: 0302

Category Name: SERIES/SEQUENCES/PROGRESSIONS

Abstract-75 Word Maximum / no special symbols ESTE PROGRAMA ES LA VERSION EN ESPAÑOL DEL #60582D. DADA UNA SERIE INFINITA ALTERNADA CUYO TERMINO GENERAL ES DEFINIDO POR EL USUARIO (41 PASOS MÁXIMO), EL PROGRAMA CALCULA RAPIDISIMAMENTE SU SUMA; HAY 2 METODOS DISPONIBLES: 1) LA TRANSFORMACION DE EULER, USANDO N DIFERENCIAS (N<=17). 2) LA TRANSFORMACION DE HUTTON, REALIZANDO 8 ITERACIONES SOBRE UNA SECUENCIA DE SUMAS PARCIALES PREVIAMENTE GENERADA. ES POSIBLE TRATAR SERIES DIVERGENTES. PRECISION DE 10 CIFRAS. 7 PÁGINAS MECANOGRAFIADAS.

Name VALENTIN (First) ALBILLO (Last)

Address

City Country Postal Code

If my program is accepted, my bonus choice is:

■ FOUR PROGRAMS OR ☐ CREDIT FOR FOUR PROGRAMS

60052D 60084D 60085D 60205D

Submittal Checklist: Please use the checklist below to insure submittal of all the proper program documentation.

■ Program Submittal
■ Program Description I
■ Program Description II
■ User Instructions
■ Program Form(s)
■ Magnetic Card (s)

Signature Date 31-XII-79

Program Description I

Program Title - Sumación de series infinitas alternadas -

Contributor's Name Valentín Albillo
Address Padre Rubio, 61 - 2º C
City MADRID 29 Country SPAIN Postal Code

Program Description, Equations, Variables : Este programa es la versión en lengua española del programa # 60582D Summation of an infinite alternating series.

El programa calcula la suma de series alternadas de la forma: $y(0) - y(1) + y(2) - y(3) + \ldots = \sum_{0}^{\infty} (-1)^i\, y(i)$ donde i = 0, 1, 2, ... hasta infinito. Esto es sumamente util cuando la serie converge más bien lentamente hacia su límite. Por ejemplo, considérese la serie $S = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$, cuyo límite es Ln 2. Si tratásemos de hallar una aproximación a su límite simplemente sumando los términos de la serie, necesitaríamos decenas de miles para lograr una aproximación de tan sólo 4 cifras decimales.

Por supuesto, existen métodos más eficientes para ésta clase de problemas. Este programa incluye 2, la bien conocida transformación de Euler, y la transformación de Hutton:

(1) TRANSFORMACION DE EULER .-

La transformación de Euler reemplaza $y(0) - y(1) + y(2) - y(3) + \ldots$ por: $= 1/2\, y(0) - 1/4\, \Delta y(0) + 1/8\, \Delta^2 y(0) - \ldots$ donde las $\Delta^m y(0)$ son las diferencias progresivas de n-ésimo orden de y(i) ; pueden utilizarse diferencias hasta el órden 17.

El programa procede como sigue: dada y(i) , (que es definida por el usuario bajo LBL E , utilizando un máximo de 41 pasos, y disponiendo de R_A , R_B), n términos de la serie (n es especificado por el usuario) son sumados de antemano, obteniendose S'. Entonces, se forma una tabla de diferencias:

$y(n+1)$ $\Delta y(n+1)$ $\Delta^2 y(n+1)$ $\Delta^3 y(n+1)$ ....
$y(n+2)$ $\Delta y(n+2)$ ....
$y(n+3)$ ......
....

calculando diferencias hasta el orden m (m es un valor especificado por el usuario, $1 \leq m \leq 17$). Y finalmente, la transformación de Euler es aplicada, obteniendose $S' = \frac{1}{2}\,y(n+1) - \frac{1}{4}\Delta y(n+1) + \frac{1}{8}\Delta^2 y(n+1) - \ldots$, y entonces:

$S = S' + S''$ es el resultado final. Algunas observaciones útiles:

a) la transformación de Euler es más eficiente aplicada a series cuya convergencia es muy lenta, tal que y(i) tienda a cero como 1/i , o así.

b) la tabulación de las diferencias puede requerir bastante tiempo de cálculo si m es grande. En general, $m \leq 10$ es aconsejable. Personalmente , considero que n = m = 8 es una elección razonable.

2) <u>TRANSFORMACION DE HUTTON</u> .- La transformación de Hutton trabaja directamente con la secuencia de sumas parciales , S_k, tal que $S_k = y(0) - y(1) + y(2) - \ldots + (-1)^k y(k)$, y reemplaza la secuencia S_0 , S_1, S_2, ... por una nueva secuencia T_0, T_1, T_2 , ... donde $T_k = \frac{1}{2}(S_k + S_{k-1})$, despues de lo cual, puede iterarse de nuevo. De hecho, el programa suma n términos de la serie de antemano , y despues calcula y almacena S_{n+1}, S_{n+2}, ... , S_{n+9} , realizando a continuación 9 iteraciones de la transformación de Hutton. Observaciones:

a) La transformación de Hutton funciona igualmente bien con series rápida ó lentamente convergentes.

b) El número de términos a sumar de antemano es elegido por el usuario ; tanto la precisión como el tiempo de cálculo dependen de él; n = 8 es un valor razonable.

c) Las sucesivas aproximaciones conseguidas por cada iteración pueden ser impresas a voluntad, a efectos de ver la convergencia del método. Esto se logra utilizando el subprograma de visualización LBL d

d) Series divergentes pueden ser tratadas en alguhos casos: la suma obtenida se llama "suma de Hutton" (ó "suma de Euler: si existen ambas, son iguales) de la serie.

e) Una gran cantidad de pasos de programa han sido duplicados para aumentar la velocidad. Las iteraciones de Hutton son directas, sin control indirecto, para evitar un ciclo dentro de otro.

f) Cualquier serie alternada puede ser sumada: sencillamente, definir el término general de forma que incluya todos los términos de su serie.

PRECAUCION : y(i) <u>debe ser estrictamente positiva</u>

incrementar el número de diferencias calculadas y/o el de términos sumados previamente , aumentará tanto la precisión como el tiempo de cálculo.

Sketch(es)

Sample Problem(s) (1) Sumar la serie: S = 1-1/2+1/3-1/4+ ... hasta 10 cifras

-definir y(i) = 1/(1+i) : $\boxed{\text{GTO E}}$, pasar a PRGM, 1 $\boxed{+}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\text{RTN}}$, pasar a RUN

-ahora , SUM = 10 , DIF = 7 : 10 $\boxed{B}$ 7 $\boxed{C}$ $\boxed{A}$ → 0.693147182

es decir, que el método de Euler, despues de 69 segundos de cálculos furiosos , da el valor 0.693147182. El valor exacto es Ln2=0.693147181

-veamos que tal lo hace el método de Hutton: $\boxed{D}$ → 0.6931471805

por tanto, despues de 56 segundos obtenemos un resultado que es exacto hasta 10 decimales.

(2) Hallar $S = \frac{1}{2}\int_{k=0}^{k=1}\int_{x=0}^{x=\pi/2} \frac{dx\,dk}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots$

-definir y(i) → $1-1/3^2+1/5^2-\ldots=\sum_0^\infty 1/(2i+1)^2$ ⇨ $\boxed{\text{GTO E}}$, pasar a PRGM , 2 $\boxed{x}$ 1 $\boxed{+}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{RTN}}$, pasar a RUN

-ahora, SUM = 8, DIF = 7 ⇨ 8 $\boxed{B}$ 7 $\boxed{C}$ $\boxed{A}$ → 0.915965595 (70 seg)

para probar el Hutton: $\boxed{D}$ → 0.915965595 (58 seg)

Observaciones: los métodos de Euler y Hutton son completamente independientes entre sí . Por consiguiente, si sus resultados coinciden es practicamente seguro que ambos son correctos. En éste último ejemplo, el valor exacto es :

$$S = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,dx = 0.915965594$$

Reference(s) -Introduction to numerical analysis - F.B. Hildebrand
International series in pure and applied mathematics - McGraw/Hill
Capítulo 5.9 .- Approximate summation , páginas 203 a 208

(3) Hallar la suma $S = -1/0.23 + 1/0.24 - 1/0.25 + 1/0.26 - \ldots$ hasta 10 cif.

-definimos el término general: $S = -\sum_{0}^{\infty} (-1)^{i}\, 1/(0.23 + 0.01\, i)$

$\boxed{\text{GTO E}}$, p.a.PRGM , $\boxed{\text{RCL A}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{RCL B}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\text{RTN}}$,p.a.RUN

-almacenamos constantes: 0.01 $\boxed{\text{STO A}}$ 0.23 $\boxed{\text{STO B}}$ 6 $\boxed{C}$ $\boxed{B}$ $\boxed{A}$ → 2.221127525

es decir, en 55 segundos, el m. de Euler proporciona $S = -2.221127525$

-el método de Hutton: 0 $\boxed{B}$ $\boxed{D}$ → 2.221127524 , en 41 segundos

-el resultado exacto es $S = -\int_0^1 \frac{1}{x^{0.77}(1 + x^{0.01})}\, dx = -100\int_0^1 \frac{t^{22}}{1+t} dt =$

$= -2.221127525$, así que tenemos 10 cifras exactas por cualquier método.

(4) Hallar la suma $1 - (1/3)^5 + (1/5)^5 - (1/7)^5 + \ldots = \sum_{0}^{\infty} (-1)^{i}(2i+1)^{-5}$

-los ejemplos anteriores fueron series muy lentamente convergentes. Este otro en cambio, converge bastante rápido.

-definimos el término general: $\boxed{\text{GTO E}}$,p.a.PRGM, $\boxed{2}$ $\boxed{x}$ 1 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{RCL A}}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{\text{RTN}}$,p.a.RUN

-almacenar constantes: 5 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{STO A}}$ 10 $\boxed{B}$ 2 $\boxed{C}$ $\boxed{A}$ → 0.9961578289 (41 sec)

(el resultado exacto es $5\pi^5/1536 = 0.9961578288$)

-veamos el método de Hutton, con impresión además: $\boxed{\text{f D}}$ → 1.000000000

4 $\boxed{B}$ $\boxed{D}$ → 0.996157835 → 0.996157827 → 0.996157829 → 0.996157828 →
→ 0.996157829 → 0.996157829 → 0.996157830 → 0.996157829 →
→ <u>0.996157829</u>

$\boxed{\text{f D}}$ → 0.000000000 (no impresión). Como puede verse, 3 iteraciones hubiesen bastado, pero se realizaron 9, ya que el número de iteraciones no es seleccionable por el usuario.

(5) Hallar la suma de Euler de $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$

-esta serie no es ni convergente, ni divergente, puesto que sus sumas parciales son 0, 2, 0, 2, ...

-definimos el término general: $\boxed{\text{GTO E}}$,p.a.PRGM, 1 $\boxed{\text{RTN}}$, p.a.RUN

-SUM = 0, DIF = 1: 0 $\boxed{B}$ 1 $\boxed{C}$ $\boxed{A}$ → 0.500000000 (en 8 segundos)

-el m. de Hutton: $\boxed{D}$ → 0.500000000 (en 38 segundos)

-el resultado exacto es: $y(x) = 1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$

$y(1) = 1/(1+1) = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1/2 = 0.5$

como caso de prueba, hállese la suma de $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$

y obténgase el resultado $S = 0.250000000$ en 9 segundos con el m. de Euler utilizando SUM = 0, DIF = 1, y en 39 segundos con el método de Hutton.

SUMACION DE SERIES INFINITAS ALTERNADAS				
			PAUSA?	
EULER	# SUM	# DIF	HUTTON	i - y(i)

STEP	INSTRUCTIONS	INPUT DATA/UNITS	KEYS		OUTPUT DATA/UNITS
1	Introducir ambas caras del programa				
2	definir el término general. Pulsar:		GTO	E	
	pasar a PRGM, e introducir la secuen-				
	cia de teclas que calculan y(i), donde				
	i se encuentra en pantalla. Despues:		RTN		
	y pasar a RUN. y(i) puede utilizar un				
	máximo de 40 pasos, y RA, RB (si se uti				
	liza el m. de Euler) ó RA,B,D,E,0,1,2,				
	3,4,5,6,7 (si sumamos por el m. Hutton)				
3	PARA UTILIZAR EL METODO DE EULER :				
3a	-introducir número de sumandos previos	SUM	B		SUM
3b	- id. id. diferencias usadas	DIF	C		DIF
	-calcular una aproximación a la suma		A		APROXIM.
4	para otros valores de SUM ó DIF, 3a ó 3b				
5	para otro caso, ir a 2				
6	PARA UTILIZAR EL METODO DE HUTTON				
6a	-introducir número de sumandos previos	SUM	B		SUM
	-seleccionar PAUSA ó no PAUSA		f	D	1.00 (P)
	(inicialmente, no PAUSA = 0.00)		f	D	0.00(nP)
	-calcular una aproximacion a la suma		D		APROXIM.
	(si se seleccionó PAUSA? , se mostraran				
	en pantalla las 8 iteraciones)				
7	para otros valores de SUM , ir a 6a				
8	para otro caso, ir a 2				
9	para calcular y(i) para un i dado:	i	E		y(i)
	NOTAS: SUM $\geq$ 0 , 1 $\leq$ DIF $\leq$ 17				
	SUM y DIF permanecen inalterados por los cálculos , y deben ser enteros positivos.				
	Despues de calcular la suma por Euler, es posible recalcularla por Hutton, y viceversa, para chequear el resultado.				

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
001 *	LBL d	32 25 14	PAUSA ?
	F ? 1	35 71 01	
	GTO 3	22 03	
	SF 1	35 51 01	1.00 = PAUSA
	1	01	
	RTN	35 22	
*	LBL 3	31 25 03	ETIQUETA AUXILIAR
	CF 1	35 61 01	0.00 = NO PAUSA
	0	00	
010	RTN	35 22	
*	LBL B	31 25 12	INTRODUCIR SUM
	STO C	33 13	
	RTN	35 22	
*	LBL C	31 25 13	INTRODUCIR DIF
	STO E	33 15	
	RTN	35 22	
*	LBL D	31 25 14	TRANSF. DE HUTTON
	SF 0	35 51 00	
	GTO 3	22 03	
020 *	LBL A	31 25 11	TRANSF. DE EULER
	CF 0	35 61 00	
	P⇄S	31 42	
	CF 2	35 61 02	
*	LBL 3	31 25 03	ETIQ. AUXILIAR
	1	01	
	STO 8	33 08	
	0	00	$\Sigma = 0$
	STO 9	33 09	
	STO I	35 33	ÍNDICE A CERO
030 *	LBL 1	31 25 01	CICLO, $\sum_0^{SUM} (-1)^i y(i)$
	GSB E	31 22 15	
	RCL 8	34 08	
	STO- 8	33 51 08	$\pm y(i)$
	STO- 8	33 51 08	
	x	71	
	STO+ 9	33 61 09	$S' = \sum_0^{SUM} (-1)^i y(i)$
	ISZ	31 34	
	RCL C	34 13	OTRO TÉRMINO ?
	RCL I	35 34	
040	x ≤ y	32 71	SI, OTRO CICLO
	GTO 1	22 01	
	F ? 0	35 71 00	HUTTON ?
	GTO 5	22 05	SI
	STO 8	33 08	NO, EULER
	2	02	PAR O IMPAR ?
	÷	81	
	FRAC	32 83	
	x ≠ 0	31 61	
	SF 2	35 51 02	
050	CLX	44	ÍNDICE A CERO
	STO I	35 33	
*	LBL 2	31 25 02	TABLA DE DIFERENCIAS
	RCL 8	34 08	CALCULA Y ALMACENA y(m+1), y(m+2), ···
	GSB E	31 22 15	
	P⇄S	31 42	
	STO (i)	33 24	

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	P⇄S	31 42	
	ISZ	31 34	
	1	01	
060	STO + 8	33 61 08	OTRO TERMINO ?
	RCL E	34 15	
	RCL I	35 34	
	x ≤ y	32 71	
	GTO 2	22 02	SI, CONTINUA EL CICLO
	2	02	
	F ? 2	35 71 02	IMPAR ?
	CHS	42	SI, $-2 \rightarrow R_8$
	STO 8	33 08	
	ABS	35 64	
070 *	LBL 6	31 25 06	ESQUEMA DE DIFERENCIAS
	-	51	2 CICLOS ANIDADOS
	STO I	35 33	
	STO D	33 14	
*	LBL 0	31 25 00	CICLO PRINCIPAL
	P⇄S	31 42	CALCULA TODAS Y CADA UNA DE LAS DIFERENCIAS NECESARIAS
	RCL (i)	34 24	
	ISZ	31 34	
	STO- (i)	33 51 24	
	P⇄S	31 42	
080	RCL E	34 15	CONTROL DEL 1er CICLO
	RCL I	35 34	
	x ≠ y	32 61	
	GTO 0	22 00	
	RCL D	34 14	CONTROL DEL 2º CICLO
	STO I	35 33	
	x = 0	31 51	
	GTO 4	22 04	
	1	01	
	GTO 6	22 06	
090 *	LBL 4	31 25 04	TRANSF. DE EULER
	P⇄S	31 42	$S = S' + S''$
	RCL (i)	34 24	donde $S' = \sum_0^{SUM} (-1)^i y(i)$
	P⇄S	31 42	
	RCL 8	34 08	
	÷	81	
	STO + 9	33 61 09	$S'' = \frac{1}{2} y(m+1) - \frac{1}{4} \Delta y(m+1) + \frac{1}{8} \Delta^2 y(m+1) - \cdots$
	2	02	
	CHS	42	
	STOx 8	33 71 08	
100	ISZ	31 34	
	RCL E	34 15	
	RCL I	35 34	
	x ≤ y	32 71	
	GTO 4	22 04	
	GTO 9	22 09	SALIDA DE Σ
*	LBL 5	31 25 05	HUTTON
	9	09	
	STO I	35 33	
*	LBL 7	31 25 07	CICLO DE SUMAS PARCIALES
110	RCL C	34 13	
	1	01	
	0	00	

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y(m+1)$	$\Delta y(m+1)$	$\Delta^2 y(m+1)$	$\Delta^3 y(m+1)$	$\Delta^4 y(m+1)$	$\Delta^5 y(m+1)$	$\Delta^6 y(m+1)$	$\Delta^7 y(m+1)$	$\Delta^8 y(m+1)$	$\Delta^9 y(m+1)$

S0	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9
S_{m+0} / $\Delta^{10} y(m+1)$	S_{m+1} / $\Delta^{11} y(m+1)$	S_{m+2} / $\Delta^{12} y(m+1)$	S_{m+3} / $\Delta^{13} y(m+1)$	S_{m+4} / $\Delta^{14} y(m+1)$	S_{m+5} / $\Delta^{15} y(m+1)$	S_{m+6} / $\Delta^{16} y(m+1)$	S_{m+7} / $\Delta^{17} y(m+1)$	S_{m+8} / +1 ó −1	S_{m+9} / Σ

A	B	C	D	E	I
		m = SUM	usado	m = DIF	usado

Program Listing II

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	+	61	calcula y almacena en los registros secundarios las sumas parciales $S_{m+1}, S_{m+2}, \ldots S_{m+9}$
	RCL I	35 34	
	-	51	
	GSB E	31 22 15	
	RCL 8	34 08	
	STO- 8	33 51 08	
	STO- 8	33 51 08	
120	x	71	
	STO+ 9	33 61 09	
	RCL 9	34 09	
	P⇄S	31 42	
	STO (i)	33 24	
	P⇄S	31 42	
	DSZ	31 33	control del ciclo
	GTO 7	22 07	
	8	08	
	STO I	35 33	
130	P⇄S	31 42	
*	LBL 8	31 25 08	ITERACIONES DE HUTTON
	RCL 8	34 08	A PARTIR DE UNA ITERACIÓN PREVIA, CALCULA UNA NUEVA SECUENCIA DE SUMAS PARCIALES, HACIENDO USO DE $T_K = \frac{1}{2}(S_K + S_{K-1})$ DONDE LAS S_K SE SUPONEN ALMACENADAS EN LOS REGISTROS SECUNDARIOS
	STO+ 9	33 61 09	
	2	02	
	STO/ 9	33 81 09	
	RCL 7	34 07	
	STO+ 8	33 61 08	
	2	02	
	STO/ 8	33 81 08	
140	RCL 6	34 06	
	STO+ 7	33 61 07	
	2	02	
	STO/ 7	33 81 07	
	RCL 5	34 05	
	STO+ 6	33 61 06	
	2	02	
	STO/ 6	33 81 06	
	RCL 4	34 04	
	STO+ 5	33 61 05	
150	2	02	
	STO/ 5	33 81 05	
	RCL 3	34 03	
	STO+ 4	33 61 04	
	2	02	
	STO/ 4	33 81 04	
	RCL 2	34 02	
	STO+ 3	33 61 03	
	2	02	
	STO/ 3	33 81 03	
160	RCL 1	34 01	
	STO+ 2	33 61 02	
	2	02	
	STO/ 2	33 81 02	
164	F ? 1	35 71 01	PAUSA ?
165	GSB 3	31 22 03	SI
	DSZ	31 33	CONTROL DE ITERACIONES
	GTO 8	22 08	
*	LBL 9	31 25 09	ETIQUETA AUXILIAR.

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	RCL 9	34 09	$\sum_{0}^{\infty}(-1)^{i} y(i)$
170	P⇄S	31 42	
	RTN	35 22	
172 *	LBL 3	31 25 03	VISUALIZACION
	1	01	
	0	00	
	RCL I	35 34	
	-	51	
	STO I	35 33	
	RCL (i)	34 24	VISUALIZA Ó IMPRIME CADA ITERACION
	-x-	31 84	
180	LAST X	35 82	
	STO I	35 33	
182	RTN	35 22	
*	LBL E	31 25 15	EVALUACIÓN DE y(i)
			y(i) debe ser definido aquí.
190			
200			
210			
220			

NOTA:

SI NO SE DESEA LA POSIBILIDAD DE VISUALIZAR LAS ITERACIONES, LOS SIGUIENTES PASOS PUEDEN SUPRIMIRSE:

001 A 010
164 Y 165
172 A 182

ESTO PROPORCIONA 23 PASOS ADICIONALES PARA CUALQUIER PROPÓSITO

LABELS

A EULER	B SUM	C DIF	D HUTTON	E (→ y(i))
a	b	c	d PRINT ?	e
0 usada	1 usada	2 usada	3 usada	4 usada
5 usada	6 usada	7 usada	8 usada	9 usada

FLAGS

0	HUTTON ?
1	PAUSA ?
2	PAR/IMPAR
3	

SET STATUS

FLAGS	ON	OFF
0	☐	■
1	☐	■
2	☐	■
3	☐	■

TRIG	
DEG	☐
GRAD	☐
RAD	■

DISP	
FIX	■
SCI	☐
ENG	☐
n	9