

Program Submittal

 New Program Revision to
Program No. _____

SPANISH LANGUAGE

HP-67 Serial No. 1 7 0 4 S 0 2 2 4 4

HP-97 Serial No. _____

Program Title

Underline 1 or 2
Keywords6 7 - I N T E G R A L E S D O B L E S
===== =====

Keyword(s)

Underlined
in Title

1 I N T E G R A L E S

2 D O B L E S

No. of Steps 1 0 9

Category No. 0 3 0 5

Category Name I N T E G R A T I O N

Abstract-75 Word Maximum / no special symbols VERSIÓN ESPAÑOLA DEL PROGRAMA #60376D . CALCULA LA INTEGRAL DOBLE DE UNA F(X,Y) DADA, ENTRE LÍMITES ARBITRARIOS X0,XM,Y0,YN, UTILIZANDO UN MÉTODO QUE DA VALORES EXACTOS SI F(X,Y) ES POLINOMIO DE GRADO 3 (O MENOS) EN X,Y Y MUY BUENAS APROXIMACIONES EN TODO CASO. LA PRECISIÓN DEPENDE DE LOS VALORES M,N ELEGIDOS POR EL USUARIO. LA INTEGRAL PUEDE RECALCULARSE CON OTROS M,N SIN REINTRODUCIR LÍMITES Y VICEVERSA. 115 PASOS Y R0,R1,...,R9 QUEDAN PARA DEFINIR F(X,Y). 7 PÁGINAS MECANOGRAFIADAS

Name VALENTIN

First

ALBILLO

Last

Address _____

City _____

Country _____

Postal Code _____

If my program is accepted, my bonus choice is:

 FOUR PROGRAMS OR CREDIT FOR FOUR PROGRAMS

6 0 2 7 6 D

6 0 2 7 7 D

6 0 3 5 5 D

6 0 3 5 6 D

Submittal Checklist: Please use the checklist below to insure submittal of all the proper program documentation.

 Program Submittal User Instructions Program Description I Program Form(s) Program Description II Magnetic Card(s)

ACKNOWLEDGMENT AND AGREEMENT

To the best of my knowledge, I have the right to contribute this program material without breaching any obligation concerning nondisclosure of proprietary or confidential information of other persons or organizations. I am contributing this program material on a nonconfidential nonobligatory basis to Hewlett-Packard Company ("HP") for inclusion in its program library, and I agree that HP may use, duplicate, modify, publish, and sell the program material, and authorize others to do so without obligation or liability of any kind. HP may publish my name and address, as the contributor, to facilitate user inquiries pertaining to this program material.

Signature _____

Date 31-XII-79

Program Description I

Program Title - INTEGRALES DOBLES -

Contributor's Name VALENTIN ALBILLON

Address PADRE RUBIO , 61 - 2º C

City MADRID 29 Country SPAIN Postal Code

Program Description, Equations, Variables: Este programa es la versión en lengua española del programa #60376 D Two-dimensional integration.

El programa evalúa cualquier integral de la forma genérica:

$$\int_{x_0}^{x_m} \int_{y_0}^{y_n} f(x,y) dy dx$$

utilizando la siguiente generalización a 2 dimensiones de la conocida fórmula de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_m} \int_{y_0}^{y_n} f(x,y) dy dx = \frac{hk}{9} [(f_{0,0} + 4f_{1,0} + 2f_{2,0} + \dots + f_{m,0}) + \\ + 4(f_{0,1} + 4f_{1,1} + 2f_{2,1} + \dots + f_{m,1}) + \\ + 2(f_{0,2} + 4f_{1,2} + 2f_{2,2} + \dots + f_{m,2}) + \\ + \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\ + (f_{0,n} + 4f_{1,n} + 2f_{2,n} + \dots + f_{m,n})] + \text{Error}$$

donde el error es

$$\text{Error} = -\frac{hk}{90} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x_p, y_p) + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x_q, y_q) \right)$$

donde las derivadas son parciales, (x_p, y_p) , (x_q, y_q) pertenecen al intervalo (x_0, x_m, y_0, y_n) ; $x_r = x_0 + rh$, $y_s = y_0 + sk$, $h = (x_m - x_0)/m$, $k = (y_n - y_0)/n$

Operating Limits and Warnings

- (1) m, n , deben ser enteros pares ; en caso contrario, el programa no se detendrá , o bien dará resultados incorrectos
- (2) si el programa ha sido detenido antes de que la integral fuese calculada, verificar si han sido intercambiados los registros primarios con los secundarios antes de continuar. Lo mismo es aplicable si aparece un mensaje de Error en la pantalla.

This program has been verified only with respect to the numerical example given in *Program Description II*. User accepts and uses this program material AT HIS OWN RISK, in reliance solely upon his own inspection of the program material and without reliance upon any representation or description concerning the program material.

NEITHER HP NOR THE CONTRIBUTOR MAKES ANY EXPRESS OR IMPLIED WARRANTY OF ANY KIND WITH REGARD TO THIS PROGRAM MATERIAL, INCLUDING, BUT NOT LIMITED TO, THE IMPLIED WARRANTIES OF MERCHANTABILITY AND FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. NEITHER HP NOR THE CONTRIBUTOR SHALL BE LIABLE FOR INCIDENTAL OR CONSEQUENTIAL DAMAGES IN CONNECTION WITH OR ARISING OUT OF THE FURNISHING, USE OR PERFORMANCE OF THIS PROGRAM MATERIAL.

INSTRUCCIONES DETALLADAS .-

- 1) Para calcular $\int_{x_0}^{x_m} \int_{y_0}^{y_n} f(x,y) dy dx$, es preciso definir $f(x,y)$: pulsar [GTO E], pasar a PRGM, e introducir la secuencia de teclas que calcula $f(x,y)$, teniendo en cuenta que x,y se encuentran en los registros X,Y del stack operativo, respectivamente. 115 pasos están disponibles para definir $f(x,y)$, así como un nivel de subrutina, y los registros primarios R0 a R9 (ambos inclusive).
- 2) Una vez que $f(x,y)$ ha sido definida, es preciso introducir los valores de m y n : m [ENTER] n [B] \rightarrow m. Si se desea introducir $m = n$, simplemente: m [ENTER] [B] \rightarrow m. Ambos valores, m, n, permanecerán almacenados, hasta que el usuario decida cambiarlos. m,n, deben ser enteros pares, y la precisión del resultado final depende de ellos; ahora bien, puesto que $f(x,y)$ es evaluada exactamente $(m+1)(n+1)$ veces, es preciso tener en cuenta que valores grandes de m y n significarán tiempos de ejecución largos ; los ejemplos mostrarán las soluciones de compromiso entre precisión y tiempo de ejecución.
- 3) Ahora, hay que introducir los límites de integración:
- x_0 [ENTER] x_m [ENTER] y_0 [ENTER] y_n [A] \rightarrow valor de la integral
- la integral será calculada y mostrado su valor en pantalla (también permanecerá almacenado en el registro secundario R6). Los límites de integración también permanecen almacenados, lo cual permite recalcular la integral, con otros valores de m y n, sin necesidad de reintroducirlos. Por ejemplo, una forma de comprobar la precisión del resultado, es calcular dos veces la integral, primero con unos valores de m y n, y otra vez con valores de m y n dobles que la anterior, y observar que tan coincidentes son los dos resultados entre sí. Los ejemplos aclaran esto.

[NOTAS]: - $f(x,y)$ puede ser determinada para unos valores arbitrarios de x,y:

y [ENTER] x [E] \rightarrow $f(x,y)$

- si $f(x,y)$ es un polinomio en x,y de grado 3 ó menos, el resultado será exacto, independientemente de los valores de m y n, así que $m = n = 2$ dará el valor exacto de la integral independientemente de los límites de integración

$$P(x,y) = ax^3y^3 + bx^3y^2 + cx^2y^3 + dx^2y^2 + ex^3y + fxy^3 + gxy^2 + hx^2y + jx^3 + ky^3 + mxy + nx^2 + py^2 + qx + ry + s$$

Program Description II

~~Sketches~~ NOTAS : el programa ha sido diseñado para que sea tan rápido como sea posible, pero si los límites de integración son muy amplios, es posible que se requiera bastante tiempo para una precisión buena. Posiblemente, la mejor forma de abordar el problema, sea escoger m,n de forma que h y k sean de un valor absoluto igual a 0.25 ó de ese orden, calcular la integral, y repetir nuevamente el cálculo con valores de m y n dobles que los anteriores, para probar el resultado nuevo contra el anterior. Esto da idea de que tan precisos son. si es necesario, doblar nuevamente m y n, y repetir el proceso hasta que los dos últimos resultados coincidan con una precisión establecida de antemano.

Sample Problem(s) 1) Calcular $\int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^2) dy dx$

- definir f(x,y) : GTO E , p.a.PRGM , x^2 $x \geq y$ $x^2 +$ RTN , p.a.RUN
- introducir m,n : 2 ENTER B \rightarrow 2.00000 (m = n = 2)
- id. límites: 0 ENTER 1 ENTER 1 ENTER 2 A \rightarrow 2.66667
- para ver más decimales: DSP 9 \rightarrow 2.666666667 DSP 5

el valor exacto es $8/3 = 2.666666667$

2) Calcular $\int_3^4 \int_1^2 (x+y)^{-2} dy dx$

- definir f(x,y) : GTO E , p.a.PRGM , $+ x^2$ $1/x$ RTN , p.a.RUN
- probamos m=n=2 : 2 ENTER B \rightarrow 2.00000
- introd. límites : 3 ENTER 4 ENTER 1 ENTER 2 A \rightarrow 0.04083
- para probar el resultado, recalculamos con m=n=4 : 4 ENTER B \rightarrow 4.00000
- recalcular: fA \rightarrow 0.04082 DSP 6 \rightarrow 0.040822 , coinciden bien

el valor exacto es $\ln(25/24) = 0.040822$, hasta 6 cifras

Solución(s) 3) Hallar $\int_{1.3}^{2.4} \int_{-0.7}^{6.2} x^2 y dy dx$

- definir f(x,y) : GTO E , p.a.PRGM , x^2 x RTN , p.a.RUN
- puesto que f(x,y) es un polinomio en x,y de grado inferior a 3, m=m=2 bastará : 2 ENTER B \rightarrow 2.00000
- introducir límites: DSP 6 1.3 ENTER 2.4 ENTER 0.7 CHS ENTER 6.2 A \rightarrow 73.540775 , que es el valor exacto

(más ejemplos a la vuelta)

Reference(s) Introduction to numerical analysis - F.B.Hildebrand

International series in pure and applied mathematics - McGraw/Hill

4) Calcular $\int_{-2.3}^{1.6} \int_{3.9}^{6.1} (e^{-x^2} + x^3 - y^3 x^2 + 7) \cdot \arctg(x-2) \cdot \sin(y+3) dy dx$

-definimos $f(x,y)$: GTO E , p.a.PROGM , STO 9 x² CHS e^x 7 + RCL 9 3
 y^x + x³ STO 8 3 y^x RCL 9 x² x - RCL 9 2 -
TAN-1 x RCL 8 3 + SIN x RTN , p.a.RUN

-este problema es realmente dificultoso, debido a que tenemos una función $f(x,y)$ que lleva unos 5 segundos por cada evaluación, y el intervalo de integración es grande (rectángulo de 3.9 por 2.2). A pesar de ello, obtendremos 6 cifras exactas.

-probemos con $m=n=2$: 2 ENTER B → 2.00000

-introducir límites : 2.3 CHS ENTER 1.6 ENTER 3.9 ENTER 6.1 A → 1200.19661

resultado obtenido en 53 segundos. Ahora, doblando m y n, obtenemos la siguiente tabla:

$m = n = 2$	$I = 1200.19661$	evaluac. = 9	
= 4	$I = 1308.08990$	= 25	
= 8	$I = 1320.48453$	= 81	
= 16	$I = 1321.23531$	= 289	
= 32	$I = 1321.27341$	= 1089	

así que tomamos como valor de la integral el último resultado
 $I = 1321.27$

el resultado 1321.27 puede considerarse exacto. Este valor tardó unas dos horas de cálculo. Sin embargo, el valor 1320.48, obtenido para $m=n=8$, se obtiene en sólamente 8 minutos, y está en error por tan sólo un 0.06 %

5) Calcular $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dy dx$

-definimos $f(x,y)$: GTO E , p.a.PROGM , x² x³ y x² + CHS e^x RTN , p.a.RUN

-por supuesto, el programa no puede ser utilizado para calcular integrales entre límites infinitos, pero podemos obtener una aproximación, si consideramos:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2} dy dx \approx \int_0^4 \int_0^4 e^{-x^2-y^2} dy dx$$

lo cual es razonable, puesto que $e^{-x^2-y^2}$ decrece muy rápidamente

-probamos con $m = n = 10$, puesto que el intervalo de integración es grande:

10 ENTER B → 10.00000 ; DSP 7 0 ENTER 4 ENTER 0 ENTER 4 A → 0.7853979

el valor exacto es $\pi/4 = 0.7853982$. Por tanto, pese a que hemos calculado una aproximación de una aproximación, el error es menor que $2.5 \cdot 10^{-7}$

$$\text{INTEGRALES DOBLES } \int_{x_0}^{x_m} \int_{y_0}^{y_n} f(x, y) \, dy \, dx \quad (\text{R0-R9})$$

RECÁLCULAR

xofxm†yof yn m†n

$y \mapsto f(x, y)$

Program Listing I

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
001 *	LBL B	31 25 12	ALMACENAMIENTO DE M, N		RCL 1	34 01	y_0
	STO B	33 12			GSB D	31 22 14	$(f_{00} + 4f_{10} + \dots + f_{m0})$
	R↓	35 53			STO+ 6	33 61 06	Σ
	STO A	33 11		060	RCL C	34 13	
	RTN	35 22			STOx 6	33 71 06	
*	LBL A	31 25 11	CALCULO DE LA INTEGRAL		RCL D	34 14	
	P= S	31 42			STOx 6	33 71 06	
	STO O	33 00	ALMACENAMIENTO		9	09	
	R↓	35 53	DE LOS LÍMITES		STO/ 6	33 81 06	
010	STO 1	33 01	DE INTEGRACIÓN		RCL 6	34 06	
	R↓	35 53	x_0, x_m, y_0, y_m		P= S	31 42	
	STO 2	33 02			RTN	35 22	
	R↓	35 53		070	* LBL D	31 25 14	SUBRUTINA AUXILIAR.
	STO 3	33 03			STO 9	33 09	
	P= S	31 42			RCL A	34 11	
*	LBL a	32 25 11	RECALCAR LA INTEGRAL		STO I	35 33	PREPARA EL ÍNDICE r
	P= S	31 42			DSZ	31 33	
	RCL 2	34 02			RCL 9	34 09	
	RCL 3	34 03			RCL 2	34 02	
020	-	51			P= S	31 42	
	RCL A	34 11	$h = \frac{x_m - x_0}{m}$		GSB E	31 22 15	
	/	81			P= S	31 42	
	STO C	33 13		080	STO 4	33 04	
	RCL O	34 00			2	02	
	RCL 1	34 01			STO 7	33 07	
	-	51		*	LBL 3	31 25 03	SUB- AUXILIAR
	RCL B	34 12			RCL 9	34 09	
	/	81			RCL 3	34 03	
	STO D	33 14			RCL C	34 13	
030	RCL B	34 12			RCL I	35 34	
	STO 5	33 05			X	71	
	1	01			+	61	
	STO- 5	33 51 05			P= S	31 42	
	RCL 0	34 00		090	GSB E	31 22 15	
	GSB D	31 22 14	y_m		P= S	31 42	
			$(f_{0m} + 4f_{1m} + \dots + f_{mm})$		6	06	
	STO 6	33 06	Σ		RCL 7	34 07	
	2	02			-	51	
	STO E	33 15			STO 7	33 07	
*	LBL 1	31 25 01	SUBRUTINA AUXILIAR		X	71	
040	RCL D	34 14			STO+ 4	33 61 04	
	RCL 5	34 05			DSZ	31 33	
	X	71	$y_s = y_0 + sk$		GTO 3	22 03	
	RCL 1	34 01		100	RCL 9	34 09	
	+	61			RCL 3	34 03	
	GSB D	31 22 14	$(f_{0s} + 4f_{1s} + \dots + f_{ms})$		P= S	31 42	
	6	06			GSB E	31 22 15	
	RCL E	34 15			P= S	31 42	
	-	51			STO+ 4	33 61 04	
	STO E	33 15	$2^0 4$		RCL 4	34 04	
050	X	71			RTN	35 22	
	STO+ 6	33 61 06	Σ	*	LBL E	31 25 15	EVALUACION DE F(X,Y)
	1	01			RTN	35 22	
	STO- 5	33 51 05		110			
	RCL 5	34 05					
	X ≠ 0	31 61					
	GTO 1	22 01	Y SALTA EN CERO				
			EL ÍNDICE S				

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
S0 y_m	S1 y_0	S2 x_m	S3 x_0	S4 Σ	S5 Índice S	S6 $\int \int$	S7 $2, 4, \dots$	S8	S9 y_s
A m	B n	C h	D k	E $4, 2, \dots$	I Índice r				

Program Listing II

STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS	STEP	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
120				170			
130				180			
140				190			
150				200			
160				210			
				220			

LABELS

A $x_0 \uparrow x_m \uparrow y_0 \uparrow y_n$	B $m \uparrow m$	C	D Σ	E $y \uparrow x \rightarrow f(x,y)$	FLAGS	SET STATUS		
					0	FLAGS	TRIG	DISP
^a RECALCULAR	b	c	d	e	1	ON <input type="checkbox"/> OFF <input checked="" type="checkbox"/>	DEG <input type="checkbox"/> GRAD <input type="checkbox"/> RAD <input checked="" type="checkbox"/>	FIX <input checked="" type="checkbox"/> SCI <input type="checkbox"/> ENG <input type="checkbox"/> n <u>5</u>
0	1 $\Sigma\Sigma$	2	3 AUXILIAR	4	2	0 <input type="checkbox"/> 1 <input type="checkbox"/> 2 <input type="checkbox"/> 3 <input checked="" type="checkbox"/>		
5	6	7	8	9	3	1 <input type="checkbox"/> 2 <input type="checkbox"/> 3 <input checked="" type="checkbox"/>		