## Notes on the back story of this document and Abstracts

The same way that after getting a wonderful *HP-25* I immediately proceeded to write many programs for it (see a selection of 40 of them in ***HP Program VA250 - HP-25 40 selected vintage programs (Album Anillas).pdf***), I did likewise once I got the much more capable ***HP-67*** back in 1976 *(no less than 45 years ago as of 2021.)*

The *HP-67* had a magnetic card reader for mass storage to boot, plus *~5x* the program steps, *~3x* the storage registers and a greatly enhanced programming paradigm, with labels, subroutines, indirection, flags, editing, better accuracy and display, etc., which meant I could write much more complex programs, both in length and capabilities, *state-of-the-art* in fact, as *the HP-67* was the top programmable pocket calculator in the world at the time, bar none.

This I did, and though unfortunately many of the programs I wrote for it are now missing, I managed to preserve a notepad *(Cuaderno ICAI)* in which I recorded about **30** of my best programs, complete with listings, theory where necessary, usage instructions and worked examples aplenty. Additionally, the notepad also records assorted topics I indulged in at the time and which I addressed with the *HP-67*, such as worked numerical analysis problems, mathematical issues, runs of other programs, numerical data-fitting experiments and miscellanea. The contents are:

> ***Caveat lector**: All the programs' documentation is handwritten in my native language, Spanish, as they were developed mainly for my private use, not to be shared with other people, foreign or not. However, as the subject matters are mostly mathematical in nature, it's perfectly possible to follow and run the examples with little difficulty, thus also learning how to use the programs. Same goes for the non-program materials.*

**Cuaderno ICAI***:* *(30 programs, 75 pages; HP-67 programs in* ***blue****, non-programs in* ***red****)*

| | |
|---|---|
| *Super-Ellipse board for a 67 Games Pac racing game* | *Hand-drawn, shows a completed game* |
| Captura del Klingon *(unknown author)* | *Klingon's Capture game (damaged listing)* |
| Ajuste de un polinomio de 5º grado a Gamma(x) | *5th-deg. polynomial fit to Gamma(x)* |
| Ajustar un polinomio adecuado a integral de Fresnel | *Polynomial fit to Fresnel Sine Integral* |
| Ejemplo de ajuste de una función de 2 variables independ. | *Sample fit to a 2-variable function* |
| Ajuste mini-max de $y=ax^2+bx+c$ a Gamma(x) | *Mini-max fit of* $ax^2+bx+c$ *to Gamma(x)* |
| Ajuste por mín.cuad de polinomio de 4º grado a $e^{(x+1)/2}$ | *4th-degree polynomial fit to* $e^{(x+1)/2}$ |
| Ajuste de funciones: Inversa de Gamma(x) | *Function fit to Inverse Gamma(x)* |
| Inversa de una matriz 4x4 | *Matrix Inverse 4x4* |
| Sistema de ecuaciones 7x7 *(***)* | *System of linear equations 7x7* |
| Hallar un mínimo de Gamma(x) entre 1 y 2 | *Find a minimum of Gamma(x) in [1,2]* |
| Polinomio de colocación grados 2,3,4 | *Polynomial fit, degrees 2, 3, 4* |
| Números primos y factorización | *Prime numbers and factorization* |
| Resolución de f(z)=0 por Newton (z complejo) | *Roots of f(z)=0 for complex z* |
| Ecuación de 4º grado: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ *(*)* | *4th-degree equation:* $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ |
| Parábola de mínimos cuadrados: $y=a+bx+cx^2$ ó $y=e^{a+bx+cx2}$ *(*)* | *Least-squares parabola or* $e^{parabola}$ |
| Polinomio cúbico de mín. cuadrados: $y=a+bx+cx^2+dx^3$ *(*)* | *Least-squares cubic polynomial* |
| Regresión lineal de 2 variables: $z=a+bx+cy$ *(*)* | *Two-variable linear regression* |
| Cambios de base *(*)* | *Base conversions* |
| Ejemplo de problemas de contorno: $y''=xy$, $y(0)=0$, $y(1)=1$ | *Sample boundary value problem:* $y'' = xy$ |
| Problemas de contorno: $y''=x^2+y^2$, $y(0)=0$, $y(1)=1$ | *Bounday value problem:* $y'' = x^2+y^2$ |
| Polinomio de 3º grado mini-max | *3rd-degree minimax polynomial* |
| Ajedrez | *Chess (all White pieces vs. Black King)* |
| Inversión de series de potencias: $y=a_1x + a_2x^2 +...+ a_6x^6$ | *Series reversion:* $y=a_1x + a_2x^2 +...+ a_6x^6$ |
| Newton - Sistemas $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ *(**)* | *Systems* $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ *by Newton's M.* |
| El buscador, el tesoro y el monstruo | *Treasure-hunt game* |
| Análisis de funciones: raices, graficación, etc. | *Function Analysis: roots, graphing, etc.* |

| | |
|---|---|
| Método de Bairstow: raices de polinomios grado N<=8 *(***)* | *Polynomial roots (deg.<=8), Bairstow Met.* |
| Bridge-it | *Bridge-it game* |
| Polinomio osculador cúbico: $y=a+bx+cx^2+dx^3$ | *Cubic osculating polynomial* |
| Raices de y(x)=0 (Iterativo, Newton, Cúbico, Parcial) | *Roots of y(x)=0 by four different methods* |
| 3x3 operaciones matriciales en cadena | *Chained 3x3 matrix operations* |
| Funciones elípticas de 1ª especie (phi,u,sn,cn,dn,inversas) | *Elliptic functions of the 1$^{st}$ kind & inverses* |
| Funciones especiales (7 funciones) | *7 Special functions (Bessel, Elliptic, etc.)* |
| Regresión lineal de 2 variables: aplicaciones | *2-variable linear regression: applications* |
| Análisis de inversiones, Valor Presente Neto, Amortizaciones | *Net Present Value, Mortgage Loans, etc.* |
| Mate con rey, alfil y caballo | *Checkmate with King, Bishop and Knight* |
| Sistemas tridiagonales NxN (N<=12) *(***)* | *Tridiagonal linear systems NxN (N<=12)* |
| Cálculo de integrales dobles | *Double integrals* |
| Inversa de una matriz NxN (N<=5) | *NxN Matrix inversion (N<=5)* |
| Ajedrez: mate con rey, alfil y caballo | *Checkmate with King+Bishop+Knight vs. K* |
| Series de Fourier - Análisis armónico - Datos discretos | *Fourier Series,Harmonic Analysis (discrete)* |
| Juego de los barcos | *Battleship game* |
| Aproximaciones racionales: $y=(a_0x^2+a_1x+a2)/(x^2+b_1x+b_2)$ | *Rational approximations* |

*(*)* listing only, I intended to, but never got to document it.

*(**)* totally *blank*, no listing or documentation. The program *did* exist and worked fine but for some reason I never got to record its listing in this notepad, let alone document it.

*(***)* written by Fernando del Rey.

# Abstracts

## Super-Ellipse board for *a* *67 Games Pac* racing game

This *Super-Ellipse* race track was carefully hand-drawn by myself as per the information given in the *HP-67 Games Pac's Racetrack* game. The page shows a completed game played by me *(A)* and three other players *(C, D, E)* ; all trajectories are displayed until the final win. Up to 5 players could play at once.

## Captura del Klingon

This is my adaptation of some *Star Trek*-themed game (unknown author) where you, as captain of the *Enterprise*, must capture (*not* destroy) the *Klingon* ship, which at the start of the game is placed randomly on a 100-sector "galaxy" grid. You have a certain number of energy units, which are used to destroy sectors (the *Klingon* can't move to a destroyed sector) and to shield the *Enterprise* against possible *Klingon* attacks. There's also random supernovas which destroy additional sectors, and the *Klingon* moves to an adjacent sector at every turn. If you manage to surround the *Klingon* ship amid destroyed sectors so it can't move, it's considered captured and you win. But if you destroy it or have no energy left, well, you lose.

I give full description and instructions, plus 3 completed games, with diagrams and comments. The first game ends in failure, as the *Klingon* ship is destroyed; the second game is a win, as the *Klingon* is captured, and the third game is another failure because I ran out of energy.

Regrettably, the listing is damaged because after 45 years the tape I used to fix the thermal printer paper to the page has erased the already very faded listing, so it's rendered unusable. Perhaps it can be found in another source.

## Ajuste de un polinomio de 5º grado *a* *Gamma(x)*

*Non-program.* I compute a fit to *Gamma(x)* in *[1,2]* (graph shown) using a 5$^{th}$-degree polynomial which passes through the 6 points at *x=1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8* and *2*. This results in a 6x6 system of linear equations, which is solved and the polynomial is explicitly given; the value of its maximum error is found and commented as well.

Upon examining the error values, a new fit is attempted, this time for $x=1, 1.1, 1.4, 1.5, 1.9$ and $2$, to try and minimize the maximum error, but it results in a polynomial with *worse* behavior. Another set of points is attempted, simulating a 3-point fit at both the function and its derivative, which does no better.

### Ajustar un polinomio adecuado a integral de *Fresnel*

*Non-program*. Polynomial fit to *Fresnel Sine Integral* in *[0, 1]*. I first obtain the accurate values of the integral for $x=0$ .. $1$, at $0.1$ steps, and then I obtain a least-squares fit to a power function, a cuadratic polynomial, a cubic polynomial, two 4$^{th}$-degree collocation polynomials and finally a 5$^{th}$ degree collocation polynomial.

The resulting errors are compared and analyzed and it's clear that the integral behaves like a simple power function, so a suitable transformation is applied to the function values and two fits are applied to the transformed values: a least-squares cubic polynomial and a 5$^{th}$ degree collocation polynomial, which results in a max. error $2.10^{-6}$.

On the other hand, I also give an *analytic* approach by obtaining the *Taylor* series expansion for $sin(x^2)$ and integrating term by term, which results in a short expression with simple coefficients giving a max. error $< 10^{-9}$.

### Ejemplo de ajuste de una función de 2 variables independientes

*Non-program*. Sample fit to a 2-variable function, defined implicitly by a cubic polynomial equation with two parameters *(a, b)* in *[0 .. 0.8, 0 .. 0.8]*. The resulting fit allows the direct computation of a real root of the equation as a function of the parameters. I first obtain a 5x5 table of values for equispaced parameter values in the interval, then I fit a 4$^{th}$-degree polynomial to each of the *rows*, obtaining 5 polynomials on the variable *b*, whose coefficients are then fit by *columns*, obtaining another five 4$^{th}$-degree polynomials, now also on the variable *a*.

So, I've got a two-variable polynomial *f(a, b)* which exactly fits the data in the 5x5 table and provides at least 5 decimal places everywhere in *[0 .. 0.8, 0 .. 0.8]*. It is then checked for interpolations and a few extrapolations.

### Ajuste mini-max de $y = ax^2 + bx + c$ a *Gamma(x)*

*Non-program*. I obtain a mini-max fit $ax^2+bx+c$ *to Gamma(x)* in *[1, 2]* by using an initial equispaced 4-tuple and using the *exchange* method to refine it. One exchange suffices and the minimax error is *~0.0046* in the interval.

### Ajuste por min.cuad de polinomio de 4º grado a $e^{(x+1)/2}$

*Non-program*. I analytically obtain a least-squares 4$^{th}$-deg polynomial fit to $e^{(x+1)/2}$ in *[-1, 1]* by using orthogonal polynomials. The resulting polynomial's max. error is *~0.000058*, and it can be easily transformed into a polynomial for $e^x$ whose max. error is less than the *Taylor* series expansion's.

### Ajuste de funciones: Inversa de *Gamma(x)*

*Non-program*. I obtain a least-squares fit to the inverse *Gamma* function in *[1, 19!]*. First, I create a table with 18 values and, after analyzing its nature, I apply a certain transformation to create a new table, which is used for a power fit $(r^2 = 0.9999666)$, giving ~2 decimal places in the whole interval, to be refined with *Newton's method*.

### Inversa de una matriz 4x4

Matrix Inverse 4x4. Inverts a 4x4 matrix quickly (1' 40") and efficiently (139 steps). Three examples are given, including solving a 4x4 system using the obtained inverse and inverting the difficult 4$^{th}$-order *Hilbert* matrix.

### Sistema de ecuaciones 7x7

System of linear equations 7x7 (by Fernando del Rey). Solves the system by inputting the coefficients just once, in row order. It allows for re-entering a row in case of error and takes just 221 steps, so it fits in a single card. It does not require reading or writing data cards either. A worked example is included.

### Hallar un mínimo de Gamma(x) entre 1 y 2

*Non-program*. I find a minimum of *Gamma(x)* in *[1,2]* by first inspecting the graph, which was drawn earlier, and then creating a table for the five 5-decimal equispaced values of *Gamma(x)* for *x=1.44 .. 1.48*. Using *divided-differences* interpolation I then obtain a quadratic polynomial fit for *Gamma(x)*, and its derivative gives a simple linear fit to the derivative of *Gamma(x)*. Equating this linear fit to *0* and solving for *x* gives the approximate location of the minimum, which is correct to almost 5 places.

Repeating the procedure using an 8-digit table, the minimum is obtained to at least *6-digit* accuracy for the *x* value, and *7-digit* accuracy for the value of the minimum.

### Polinomio de colocación grados 2,3,4

Polynomial fit, degrees 2, 3, 4. Finds the 2nd-, 3rd- or 4th-degree polynomial which fits a set of 3, 4 or 5 data points, in 6", 8" or 11", respectively. Allows for review of the computed coefficients and for evaluating the obtained polynomial for a given *x* value. A nice example involving the *Gamma* function is discussed.

### Números primos y factorización

Prime numbers and factorization *(223 steps)*. Uses a *factorization wheel* to quickly find the prime factors of a given integer or to tabulate all primes within a given interval. Many examples given. Also includes a simpler, much shorter version *(52 steps)* using a factorization wheel too, to quickly factorize a given integer. Examples and timings included. Last, a couple of nice non-related miscellanea are also featured.

### Resolución de *f(z)=0* por *Newton* (*z* complejo)

Roots of *f(z)=0* for complex *z*. Finds a real/complex root of *f(z)=0* using *Newton's method*, where *z* is real or complex and *f(z)* is a user-defined function. The program implements the following functions for real/complex arguments, which can be used to define *f(z)*: $\sin(z)$, $\sin^{-1}(z)$, $e^z$, $\ln(z)$, $z_1+z_2$, $z_1-z_2$, $z_1*z_2$, $z_1/z_2$, $z_1$^$z_2$, plus two complex storage registers, *STO 1*, *RCL 1*, *STO 2*, *RCL 2*. All those functions can be used from the keyboard as well, stack diagrams are given. 50 steps and 15 registers are free to define *f(z),* which can also be evaluated from the keyboard.

Two worked examples are included, as well as hints on how to save steps while defining *f(z)*, how to compute other functions ($\cos(z)$, $\cos^{-1}(z)$, $\tan(z)$, hyperbolics), and how to evaluate arbitrary expressions from the keyboard.

### Ecuación de 4º grado: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

4th-degree equation: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$. It solves equations up to deg. 4 by directly using the exact formulas (no iteration), achieving full accuracy (rounding errors aside) and finding all 4 roots at once. *Listing only*.

### Parábola de mínimos cuadrados: $y = a + bx + cx^2$ ó $y = e^{a + bx + cx2}$

Least-squares parabola or $e^{parabola}$. Computes the coefficients of a least-squares parabolic fit to a given set of data, or of an exponential-parabolic fit. *Listing only*.

### Polinomio cúbico de mín. cuadrados: $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

Least-squares cubic polynomial. Computes the coefficients of a least-squares cubic polynomial fit to a given set of data. *Listing only*.

### Regresión lineal de 2 variables: $z = a + bx + cy$

Two-variable linear regression. Computes the coefficients of a least-squares 2-variable linear fit to a given set of data. *Listing only*.

### Cambios de base (*)

Base conversions. *Listing only.*

### Ejemplo de problemas de contorno: $y'' = xy$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

*Non-program*. Sample *boundary value* problem: $y''=xy$. I give both *numeric* and *analytic* approaches to a *boundary value* problem, where the values of the function are given at the boundaries of the interval, instead of the usual *initial value* problem, where the values of the function $y$ and its first derivative $y'$ are given at a single point.

First I determine what increment $h$ will achieve 5 correct decimals by computing an initial value problem using various $h$, each half the previous one, and inspecting the results. Then I try various guesses for the value of $y'$ at the lower end, and interpolate the results. The resulting table of $y$ values is correct to 6 decimal places. I then fit a plethora of functions to the values in the table, namely a least-squares *(LS)* parabola, *LS* cubic polynomial, 4$^{th}$- and 5$^{th}$-degree collocation polynomials, cubic minimax polynomial, etc. This completes the *numeric* approach.

For the *analytic* approach, I use the *Taylor series expansion* of $y$ and obtain the values of its $n^{th}$-derivatives at $x = 0$ as a function of $\boldsymbol{a}$, the unknown value of $y'(0)$. Equating the given value of $y(1) = 1$ with the value of the series expansion at $x = 1$ results in a *linear* equation in $a$, which is then solved for $a$, obtaining any desired accuracy by using enough terms from the series. A 9-digit value of $a$ is then used together with a suitable value for the increment $h$ to numerically obtain a table of $y$ and $y'$ values accurate to 9 places in $[0, 1]$.

### Problemas de contorno: $y'' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$

*Non-program*. Boundary value problem: $y'' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. The problem is similar to the previous one but I go directly for the *analytic* solution and use a different strategy. Instead of using a *Taylor* series expansion to compute the derivatives, I assume the solution is an infinite series of a particular form, and equating both sides of the diff. equation I obtain its coefficients as a polynomial function of $\boldsymbol{a}$, the unknown value of $y'(0)$.

Thus, the series expansion of $y$ as a function of both $x$ and $a$ is obtained, and $a$ is determined by solving the *polynomial* equation in $a$ which results from evaluating the series at $x = 1$ and equating this value with the given value of $y(1) = 1$. Using 1, 2, .., 5 terms the corresponding polynomial equation is solved for $a$ and we can see its quick convergence. The final, 7-decimal value of $a$ is then used to compute a numeric value for $y(1)$ which is correct to 7 digits. Finally, the resulting series expansion for $y$ on $[0, 1]$ is given explicitly up to the $x^{13}$ term *(error* $< 10^{-6}$*.)*

### Polinomio de 3º grado mini-max

*Non-program*. 3$^{rd}$-degree minimax polynomial. I show the way to obtain the coefficients of a cubic polynomial that fits a set of 5 arbitrary data points (distinct abscisas) in such a way that the *maximum* absolute error is *minimum (minimax)*. First, I construct a system of 5 linear equations where the unknowns are the 4 coefficients and the maximum error, and then I solve it analytically as a function of the data points. This solution for 5 data points can then be used iteratively to find the cubic minimax polynomial for $N$ data points via the *exchange method*.

An example is given where the best cubic polynomial approximating $y=sin(x)$ in $[0, 1]$ is desired. I obtain the cubic

*Taylor* approximation, the cubic *least-squares* polynomial, four cubic *collocation* polynomials and the cubic *minimax* polynomial, and compare their maximum errors in the whole interval. The cubic minimax wins outright.

### Ajedrez

Chess (all *White* pieces vs. *Black King*). Inspired in a puzzle by Henry Dudeney, the calculator has all 16 *White* pieces vs. your lone *Black King*. Starting from the initial position, the calculator has to *checkmate* your *King* in 6 moves or less. If it does, it wins. Else, you're declared the winner. I wrote this program in 1976, well before the adoption of the current algebraic chess notation, so all moves are input/output using a key, which is explained.

This 207-step program also requires a data card loaded with 24 data values, which must be read before running the program. One sample game is given (2 chess diagrams).

### Inversión de series de potencias: $y = a_1x + a_2x^2 + ... + a_6x^6$

Series reversion: $y = a_1x + a_2x^2 + ... + a_6x^6$. Given the coefficient $a_1$ .. $a_6$ of a series $y = a_1x + a_2x^2 + ... + a_6x^6$, it computes the coefficients $b_1$ .. $b_6$ of the reverse series $x= b_1y + b_2y^2 + ... + b_6y^6$. Also, it allows for computing *y* if *x* is given and conversely, computing *x* if *y* is given. All input and output coefficients are stored. Includes two nice examples, one finding the reverse series for the *Taylor* series expansion of some function, thus obtaining the series expansion of its inverse, and the other computes a root of a cubic equation by reversing the cubic polynomial.

### Newton - Sistemas $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$

*Systems* $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ by *Newton's Method*. Regrettably there's *no listing* for this program, let alone documentation of any sort. If I ever manage to find it among my vintage papers, I'll include it here eventually.

### El buscador, el tesoro y el monstruo

Treasure-hunt game of my own creation. There's a 10x10 jungle where a treasure is hidden somewhere, protected by a number of nearby mines, and to win the game you must find it without stepping onto a mine. Alas, there's also a monster somewhere else, which moves towards you at every turn, and you'll lose if it gets you before you get the treasure. You've got a *radar* which will give you the rounded distances to both treasure and monster, a *detector* which will warn you of the presence of mines nearby, and a *gun* to shoot the monster which, if hit, will materialize somewhere else; you can reload the gun by going to a particular location.

Full instructions are provided and a complete game with 5 board positions shown and commented.

### Análisis de funciones: raices, graficación, etc.

Function Analysis: roots, graphing, etc. Given a user-defined function *y(x)*, the program can compute for any given *x* value the value of *y(x)*, a series of values of *y(x)* given an initial *x* and an *increment*, the 1st derivative *y'(x)*, the 2nd derivative *y''(x)*, the definite integral of *y(x)* in the interval *[a,b]* or *[a, Inf]*, a root of *y(x)*, or a root of *y'(x)*.

### Método de Bairstow: raices de polinomios grado N<=8

Polynomial roots, degree <= 8 (by Fernando del Rey). Uses *Bairstow's Method* to compute all the roots real and/or complex of an $N^{th}$-degree polynomial with real coefficients, for $N<=8$. The polynomial is deflated after finding each root or pair of conjugate roots. Three examples are included (of 8th-, 6th- and 5th-degree, respectively.)

### Bridge-it

*Bridge-it* game. A game played on a grid of order *N* between the calculator and the user. Full instructions are given, with diagrams, and a complete sample game is included.

**Polinomio osculador cúbico:** $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

Cubic osculating polynomial. Computes the coefficients of a cubic polynomial which fits two data points *(x, y, y')*, i.e., it matches the value of both the function *y* and the first derivative *y'* at each of the two *x* values. It allows for reviewing the computed coefficients and for the evaluation of *y* or *y'* for a given *x*. Two full examples are given.

**Raices de** $y(x) = 0$ **(Iterativo, Newton, Cúbico, Parcial)**

Roots of $y(x)=0$ by four different methods. The user can select either an *Iterative* method (*Secant* method), *Newton*'s method (order 2), a *cubic* method (order 3), or a *Partial Newton*'s method. It can also evaluate *y(x)* for a given *x* or for an initial *x* and an *increment*. Three worked examples are included, comparing all methods, and the remark is made that the *Partial Newton*'s method is particularly effective if *y(x)* takes relatively long to evaluate.

**3x3 operaciones matriciales en cadena**

Chained 3x3 matrix operations. It simulates a stack of two 3x3 matrix registers, *A*, *B*, and implements the following operations: *Input A, Output A, ENTER (duplicate A), B + A, B - A, B x A,* $A^{-1}$ *(inverse),* $A^t$ *(transpose), DET(A) (determinant), k . A (scalar multiplication).* Additionally, the keyboard operation *P<>S* performs the *A<>B* (exchange) operation (like the *X<>Y* operation). Two fully worked examples are given, including stack diagrams.

**Funciones elípticas de 1ª especie (*phi*, *u*, *sn*, *cn*, *dn* e inversas)**

Elliptic functions of the 1st kind & inverses. For given *k* and *u*, it can compute *phi(u)* (aka *am(u), amplitude), sn(u), cn(u), dn(u)* and their inverses. All of them behave like the built-in functions, i.e., they take their argument from stack register *X*, leave the result in *X*, and preserve the argument in *LAST X* while leaving the rest of the stack *(Y, Z, T)* unaltered. All primary registers are available for the user. Four nice, fully worked examples included.

**Funciones especiales (7 funciones)**

7 Special functions. Computes the *Sine integral*, the *Fresnel Sine* & *Cosine* integrals, the probability integral, *Bessel* and *Modified Bessel* functions of order *n* $(I_n(x), J_n(x))$ and the *Complete elliptic integral* of the 2nd kind.

All of them behave like the built-in functions, i.e., they take their argument from stack register *X*, leave the result in *X*, and preserve the argument in *LAST X* while leaving the rest of the stack *(Y, Z, T)* unaltered. All primary registers are available for the user. Four nice, fully worked examples included.

**Regresión lineal de 2 variables: aplicaciones**

*Non-program*. 2-variable linear regression application. I demonstrate how the least-squares two-variable linear regression program, together with applying various transformations on the input data, can be used to fit a wide class of functions to a set of data points, while having three independent parameters to play with and the advantage of a least-square procedure. A test case is included, as described next, with commented results and some useful advice.

I use the *Gamma(x)* function for *x* in *[1, 2]* as a test case, fitting 18 different 3-parameter expressions to a 6-point equispaced data set, including various polynomials and power/exponential/logarithmic/trigonometric terms, composed either by addition or multiplication. The correlation coefficient $r^2$ and the maximum absolute error are given for each of them, with the best one having $r^2=0.9999$ and *max.* $|error| = 0.0006$ in the whole interval.

**Análisis de inversiones, Valor Presente Neto, Amortizaciones**

Investment Analysis, Net Present Value, Loan Amortization, etc. It mimics some functions of the *HP-92 Investor*, allowing the user to enter up to 21 uneven cash flows and then compute the *Internal Rate of Return (IRR)*, the *Net Present Value (NPV)* for a given % interest rate, the *PVA* profile by giving an initial % interest rate and an increment, or a detailed *Loan Amortization Schedule* between any two given periods or for a single period.

The cash flows can be edited or reviewed at any time, and repeated cash flows can be entered by simply pressing **[R/S]**. Includes five very complete real-life examples and the results are thoroughly discussed.

### Mate con rey, alfil y caballo

*Non-program*. Checkmate with *King*, *Bishop* and *Knight vs King.* A sample run of the program, where I conduct the four *White* pieces vs. the lone *Black King*, and manage to checkmate in 31 moves (out of the max. 50 moves allowable). Includes 6 chess diagrams. Can be used to test proper program loading after you first key it in.

### Sistemas tridiagonales NxN (N <= 12)

Tridiagonal linear systems NxN (N <= 12) by Fernando del Rey. Solves *NxN* tridiagonal linear systems of equations for *N <= 12*. The coefficients are introduced just once in order, from left to right and top to bottom, and the computed values of the unknowns are then displayed and can be reviewed.

A nice example is given, in which a 2nd-order differential equation *boundary value* problem is numerically solved by using *finite differences*, which requires solving a 9x9 tridiagonal system to find the 9 intermediate values.

### Cálculo de integrales dobles

Double integrals. The definite double integral of a user-defined *f(x,y)* in the interval $[x_0, x_m]$, $[y_0, y_n]$ is numerically computed by using nested *Simpson's Rule* (exact for two-variable polynomials up to 3th degree) applied over *m*n* subintervals. The user has 115 program steps and 10 primary registers to define *f(x,y)*. 3 examples included.

### Inversa de una matriz NxN (N <= 5)

NxN Matrix inversion (N <= 5). Can invert a non-singular (its determinant is *not* 0) *NxN* matrix for *N <=5*. The inverted matrix replaces the original one in the storage registers. As only $R_I$ is available to perform all the 2-dimensional indexing to retrieve elements and store intermediate results, the execution times are quite slow.

### Ajedrez: mate con rey, alfil y caballo

Checkmate with King, Bishop, Knight vs. King. The calculator conducts the four *White* pieces vs. the lone *Black King* conducted by the user, who initially can place it in any legal position within a 4x3 rectangle on the board. The calculator wins if it manages to checkmate the king in 8 moves or less, else the user wins.

A *flowchart* depicting the program's playing logic is included, as is a sample run (with 2 chess diagrams.)

### Series de Fourier - Análisis armónico - Datos discretos

Fourier Series, Harmonic Analysis (discrete data). The program computes and stores up to 9 harmonics at a time for a given set of *N* equispaced data points, plus the constant term $a_0$ (twice the mean value). If *N<=19*, the sum of the series will exactly match the given data points and *Smin(k)* can be computed, useful to select the min. number of harmonics needed for a given max. error. If *N>19*, the series will be a 9-harmonic *least-squares* approximation.

The user can compute the estimated *y* for any number of harmonics *<=9*, perform automatic evaluations using a given increment, correct input errors and review the computed harmonics. 3 fully worked examples included.

## Juego de los barcos

*Battleship* game. A solitary version of *Battleship* played on a 10x10 grid where the program places 10 ships of various sizes from 1 to 4 squares long, so that none touch or overlap each other. Optionally, the grid can be 20x10 and 1 or 2 standard fleet can be placed on it, or the user can place any number of ships from 1 to 5 squares long.

Once the fleet is randomly placed by the program, the user must try to destroy all the ships in a minimum number of turns by introducing the coordinates of the grid location to shoot at. The program will return a code indicating if a ship was damaged or sunk or else the number of nearby ships, if any. One sample game included.

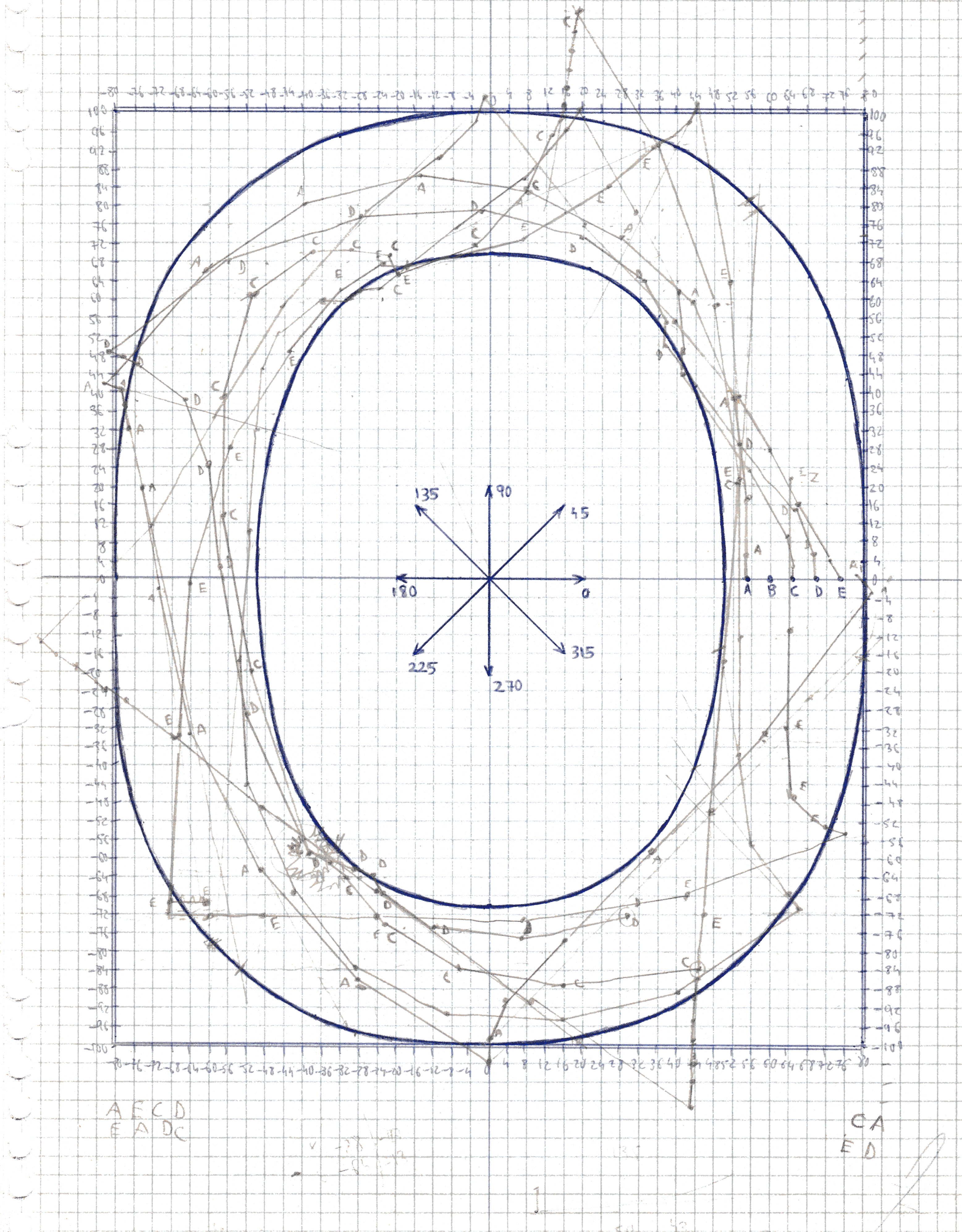
## Aproximaciones racionales: $y = (a_0x^2 + a_1x + a2) / (x^2 + b_1x + b_2)$

Rational approximations $y = (a_0x^2 + a_1x + a2) / (x^2 + b_1x + b_2)$ . Given five data points, the program computes the coefficients of a rational function that passes through all of them. The coefficients may be entered in any order and changed at will afterwards, the computed coefficients may be reviewed, and the rational function can then be evaluated at any given $x$.

It works for arbitrary points, equispaced or not, and the data points may include *Infinity* values for $x$ or $y$, as long as a maximum of 2 *zeros* and/or 2 *poles* are specified. 4 full examples are provided, including a tricky one.

*Valentin Albillo, 27-09-2021*

ICAI



90
45
0
315
270
225
180
135
A
B
C
D
E
A E C D
E A D C
C A
E D

# Captura del klingon

| CAPTURA DEL KLINGON | | | claves | |
|---|---|---|---|---|
| | DISPARO | ULTIMA POSICION | energía acabada | = "." |
| | | | klingon destruido | = Error |
| | | | supernova | = 5OL → (x.y) |
| START | xy → | x.y | (BASE) ataque | = HIELO → m |
| | | | repetición | = SILI |

```
001 *LBLA
002    CF2
003   GSBE
004      5
005      x
006    INT
007      1
008      8
009      +
010   STO8
011    P⇄S
012   CLRG
013    P⇄S
014   GSB1
015   STO1
016   GSB1
017   STO2
018 *LBL0
019   RCL1
020   RCL2
021   RCLA
022      ÷
023      +
024   STO7
025   RCL8
026   DSP0
027    PSE
028   DSP1
029   X=0?
030    SF2
031 *LBL3
032   RCL1
033   STO3
034   RCL2
035   STO4
036      3
037   STOI
038   GSB2
039   ISZI
040   GSB2
041   RCL3
042   STOI
043   RCL4
044   STO0
045   GSBe
046   X≠0?
047   GTO3
048   RCL3
049   STOA
```

```
053
054
055      -
056   X>0?
057   GSB5
058   GSBE
059      .
060      2
061      -
062   X<0?
063   GSB6
064   RCL7
065    F2?
066   GTO9
067    R/S
068 *LBLB
069   RCLA
070      ÷
071      1
072   ST-8
073     R↓
074    INT
075   STOI
076   LSTX
077    FRC
078   RCLA
079      x
080   STO0
081   RCL2
082   X≠Y?
083   GTO4
084   RCLI
085   RCL1
086   X≠Y?
087   GTO4
088      0
089    1/X
090 *LBL2
091   GSBE
092      3
093      x
094    INT
095      1
096      -
097   ST+I
098   RCLI
099   X<0?
100    CLX
```

```
104   STOi
105    RTN
106 *LBL4
107   GSBe
108   X=0?
109   GTO4
110      1
111      7
112      1
113      9
114   PRTX
115   GTO0
116 *LBL4
117   GSB8
118   GTO0
119 *LBL6
120   GSB1
121   STOI
122   RCL1
123   X=Y?
124   GTO6
125   GSB1
126   STO0
127   GSBe
128   X≠0?
129   GTO6
130      7
131      0
132      5
133   PRTX
134   GSB8
135   RCLI
136   RCL0
137   RCLA
138      ÷
139      +
140   PRTX
141    RTN
142 *LBL5
143      0
144      7
145      3
146      1
147      4
148   PRTX
149      1
150   ST-B
151   RCL8
152   DSP0
```

```
156    SF2
157    RTN
158 *LBLe
159    P⇄S
160   RCLi
161    P⇄S
162   RCL0
163      1
164      +
165    10ˣ
166      ÷
167    FRC
168    RND
169    RTN
170 *LBL1
171   GSBE
172      1
173      0
174   STOA
175      x
176    INT
177    RTN
178 *LBLE
179   RCL9
180   X=0?
181      1
182    R→D
183    FRC
184   STO9
185    RTN
186 *LBL8
187   RCL0
188    10ˣ
189    P⇄S
190   ST+i
191    P⇄S
192    RTN
193 *LBL9
194    PSE
195 *LBL7
196      .
197   PRTX
198   GTO7
199 *LBLC
200   STO9
201    RTN
```

## Listado

- se adjunta al lado

## Status

- ocupa las etiquetas

  A, B, C, E, e, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

- ocupa los registros

  todos excepto R5, R6

- libres las etiquetas

  D, a, b, c, d

- libres los registros

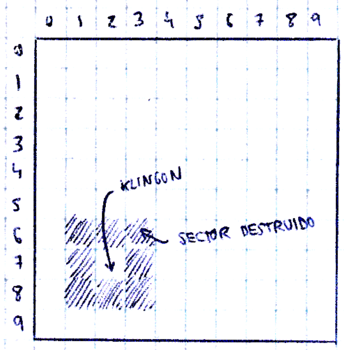
  5, 6

- status inicial

  CF0, CF1, CF2, CF3,

  DSP 1, FIX, DEG

## características




- el juego consiste en lo siguiente:

~ en una galaxia dividida en 100 sectores, se encuentra (en alguna parte) la nave enemiga klingon. Su misión, como comandante de la nave Enterprise, consiste en capturar al klingon, para lo cual dispone de un cierto número (al azar) de unidades energéticas, variable entre 18 y 22.

La forma de capturar al klingon consiste en privarle en absoluto de todo movimiento, destruyendo todos los sectores contiguos al que ocupa, (como muestra el diagrama), con la precaución de no destruirlo, pues caso de ser así, tendrá que enfrentarse a una corte marcial y su misión habrá sido un fracaso. Para destruir un sector cualquiera, basta especificar sus coordenadas, y disparar, lo cual gastará una unidad energética de las disponibles. Caso de agotarse la energía, la misión habrá fracasado. La nave klingon se mueve al azar a cualquier sector adyacente al que ocupa, pero no puede moverse a un sector destruido, aunque sí atacar, disparando rayos congeladores, contra los cuales debe protegerse la Enterprise mediante un escudo de energía; esto gastará una unidad energética adicional. Igualmente, en la galaxia puede explotar una supernova, con lo cual se destruye el sector en el cual explota, (nunca puede ser el ocupado por el klingon). Para efectuar sus disparos, la nave Enterprise cuenta con la información suministrada por sus sensores, que consiste en la última posición ocupada por el klingon antes de moverse. Finalmente, las supernovas tienen una probabilidad de 20% de estallar, y el ataque tiene 10% de posibilidades de producirse. ¡Buena suerte!

## características e instrucciones

1 - introducir ambas caras de la tarjeta

2 - opcional: introducir semilla ó utilizar la de la máquina → base C → base

3 - inicializar: A
↓
nº de u.e
↓
(supernova → sector)
↓
(ataque → nº de ue)
↓
última posición del klingon x.y

claves:
- supernova = SOL → sector (x.y) destruido
- ataque = HIELO → nº de ue restantes tras el ataque
- klingon destruido = Error
- energía acabada = "."
- sector repetido = SILI → nº de ue restantes

4 - sector a destruir = x y B → nº de ue (si no estaba destruido previamente) → (supernova → sector)
↓
(ataque → nº de ue)
↓
última posición del klingon x.y
→ clave de energía acabada = final
↙ introducir nuevo disparo

clave de sector ya destruido → nº de ue
clave de klingon destruido = final

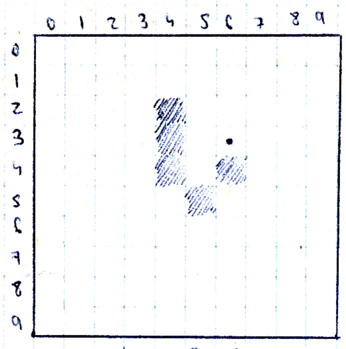
5 - proseguir hasta finalizar el juego

6 - para otro juego, ir a 2

Ejemplo 1

base inicial 0,2 C → 0.2

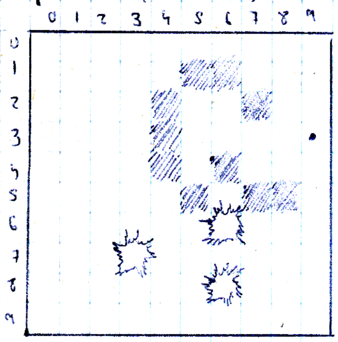
iniciación, A → 20 (u.e) → 3.6 (ultima posición del Klingom)



posición después de (5)

disparos sucesivos,

1) 55 B → 19 (ue) → 2.5 (ut. posición)
2) 44 B → 18 → 3.6
3) 34 B → 17 → 2.6
4) 24 B → 16 → 2.5
5) 46 B → 15 → 3.6
6) 15 B → 14 → HIELO (ataque) → 13 (ue) → 3.7 (ult. posición)
7) 57 B → 12 → 3.6
8) 16 B → 11 → HIELO → 10 → SOL → 8.6 (sector de supernova) → 4.7 (ult. posición)
9) 27 B → 9 → SOL → 6.6 → 3.8
10) 58 B → 8 → SOL → 7.3 → 3.9
11) 59 B → 7 → 4.9
12) 28 B → 6 → 3.9
13) 19 B → 5 → 4.9
14) 29 B → 4 → 3.8
15) 36 B → 3 → 4.9
16) 48 B → Error ¡el Klingom ha sido destruido, la misión fracasó!

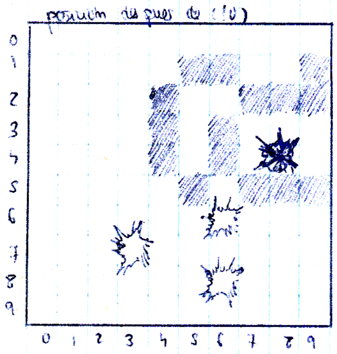


posición después de (10)

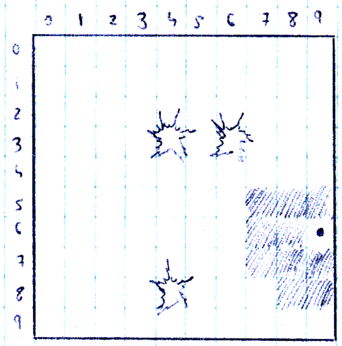
~ para otro juego siguiente a este, sin introducir nueva base

iniciación → borrar el error anterior CLX, A → 20 ue → 8,9 (ult. posición)

1) 78 B → 19 → SOL → 3,4 → 7.9
2) 59 B → 18 → 6.9
3) 67 B → 17 → 6.8
4) 58 B → 16 → 6.9
5) 57 B → 15 → SOL → 3.6 → 6.8
6) 77 B → 14 → SOL → 8.4 → 6.9
7) 89 B → 13 → 7.9
8) 88 B → 12 → 7.9
9) 68 B → 11 → 6.9
10) 79 B → 10 → 6.9

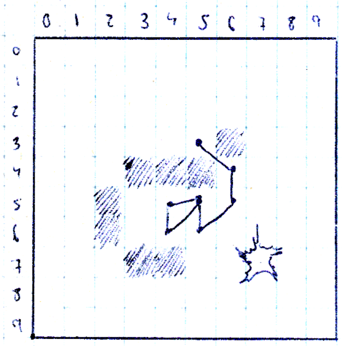


posición final



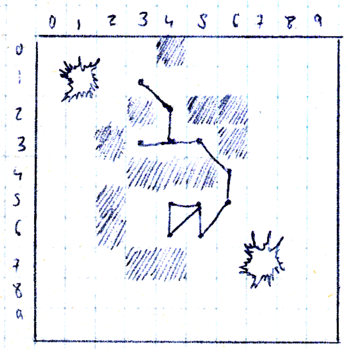
y no es preciso proseguir, puesto que el diagrama muestra que el Klingom ha sido capturado. ¡Éxito!

Intentémoslo otra vez, base inicial 1.8 C, A → 18 ue → 5.5 (ultima posición)



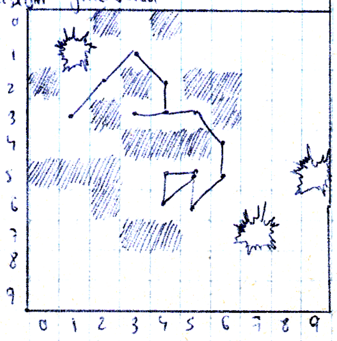
posición después de (8)

1) 43 B → 17 → 5.4
2) 52 B → 16 → 6.4
3) 44 B → 13 → 5.4
4) 62 B → 14 → 5.5
5) 73 B → 13 → 6.5
6) 45 B → 12 → 5.6
7) 74 B → 11 → 4.6 trata de escapar
8) 36 B → 10 → SOL → 7.7 → 3.5 ¡se escapó!
9) 23 B → 9 → SOL → 1.1 → 3.4
10) 32 B → 8 → 3.3
11) 25 B → 7 → HIELO → 6 → 3.4
12) 26 B → 5 → 2.4 de nuevo trata de escapar
13) 04 B → 4 → 1.3 ¡volvió a hacerlo!
14) 02 B → 3 → 2.2 y vuelve a evadirse
15) 70 B → 2 → 3.1
16) 51 B → 1 → SOL → 5.9 → 3.1
17) 50 B → 0 → 2.2 → "." se acabó la energía, misión fracasada



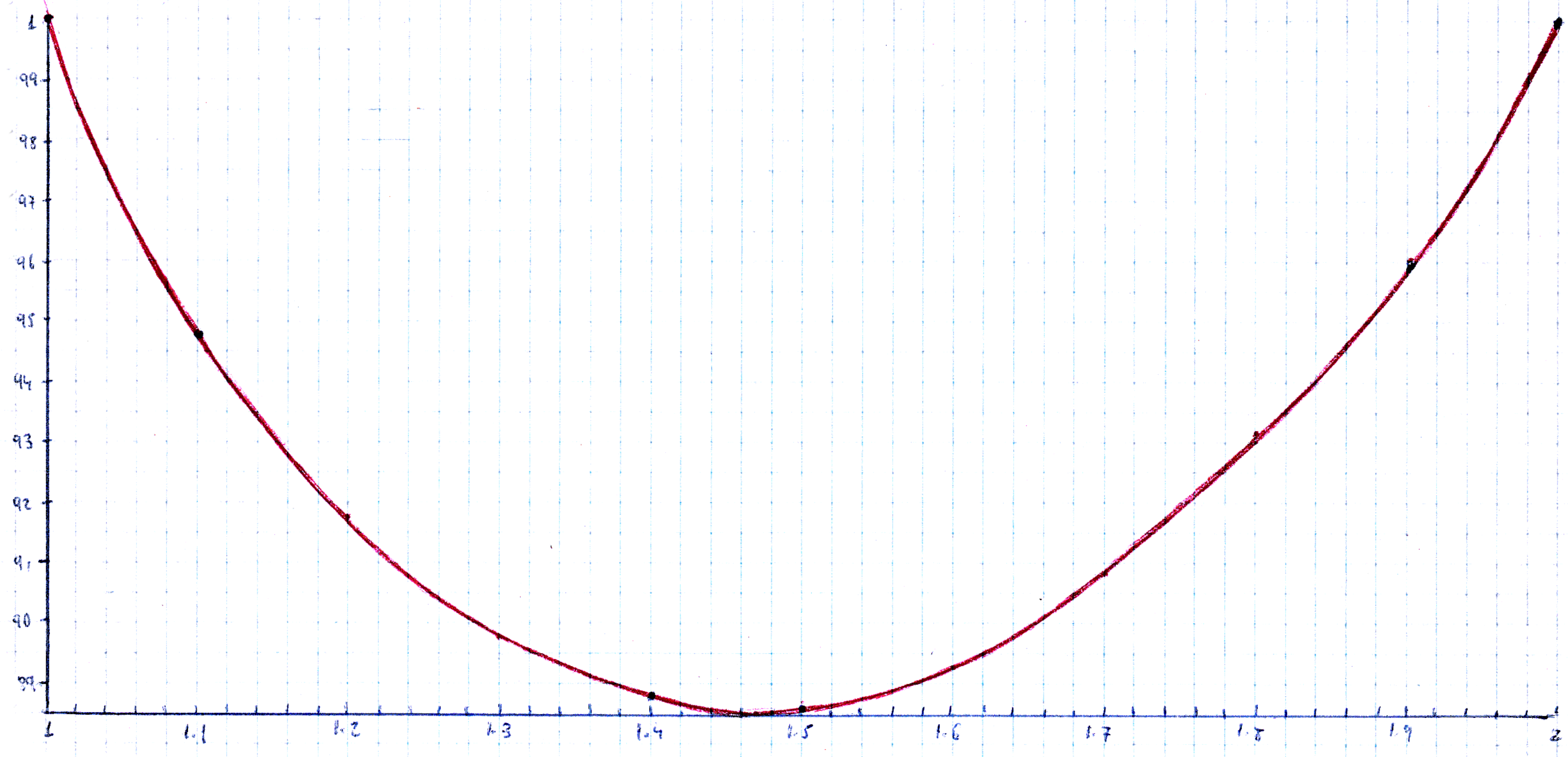
posición después de (13)

posición final



Ajustar un polinomio de grado 5 a la función $\Gamma(x)$ entre 1 y 2

- la gráfica de la función es.




~ a) pol. de colocación $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$ en 1 - 1,2 - 1,4 - 1,6 - 1,8 - 2.

el sistema a resolver es

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \\ a_0 + 1{,}2\, a_1 + 1{,}4\, a_2 + 1{,}6\, a_3 + 1{,}8\, a_4 + 2\, a_5 = 0.91816874 \\ a_0 + 1{,}44\, a_1 + 1{,}96\, a_2 + 2{,}56\, a_3 + 3{,}24\, a_4 + 4\, a_5 = 0.88726382 \\ a_0 + 1{,}728\, a_1 + 2{,}744\, a_2 + 4{,}096\, a_3 + 5{,}832\, a_4 + 8\, a_5 = 0.89351535 \\ a_0 + 2{,}0736\, a_1 + 3{,}8416\, a_2 + 6{,}5536\, a_3 + 10{,}4976\, a_4 + 16\, a_5 = 0.93138377 \\ a_0 + 2{,}48832\, a_1 + 5{,}37824\, a_2 + 10{,}48576\, a_3 + 18{,}89568\, a_4 + 32\, a_5 = 1 \end{cases}$$

resuelto, y puesto el polinomio como antes, resulta ser

$$\underline{P(x) = 3{,}679661745 - 6{,}537504473\, x + 6{,}287147089\, x^2 - 3{,}199862426\, x^3 + 0{,}8632624925\, x^4 - 0{,}09270442604\, x^5}$$

error máximo en $[1,2]$, $\varepsilon = 1{,}04 \cdot 10^{-4}$ en $x = 1{,}06$

errores
$$\begin{cases} 1{,}1 - 88 \cdot 10^{-6} \\ 1{,}3 - -25 \cdot 10^{-6} \\ 1{,}5 - 16 \cdot 10^{-6} \\ 1{,}7 - -19 \cdot 10^{-6} \\ 1{,}9 - 52 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

- alternan en signo,
- mayores cerca de los extremos
- menores en el intervalo central

~ b) en vista del error anterior, buscamos mejorar los extremos, colocándolo en 1-1,1-1,4-1,5-1,9-2

~ el sistema es ahora

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 \\ a_0 + 1{,}1a_1 + 1{,}4a_2 + 1{,}5a_3 + 1{,}9a_4 + 2a_5 = 0{,}95135077 \\ a_0 + 1{,}21a_1 + 1{,}96a_2 + 2{,}25a_3 + 3{,}61a_4 + 4a_5 = 0{,}88726382 \\ a_0 + 1{,}331a_1 + 2{,}744a_2 + 3{,}375a_3 + 6{,}859a_4 + 8a_5 = 0{,}88622693 \\ a_0 + 1{,}4641a_1 + 3{,}8416a_2 + 5{,}0625a_3 + 13{,}0321a_4 + 16a_5 = 0{,}96176583 \\ a_0 + 1{,}61051a_1 + 5{,}37824a_2 + 7{,}59375a_3 + 24{,}76099a_4 + 32a_5 = 1 \end{cases}$$

~ resuelto y ordenado, da

$$P(x) = 3{,}767327788 - 6{,}835343666x + 6{,}683490388x^2 - 3{,}459292120x^3 + 0{,}946526 7853x^4 - 0{,}103209 1752x^5$$

~ que es peor, da error máximo $\varepsilon = 1{,}06 \cdot 10^{-4}$ en $x = 1{,}73$, y peores errores en todas partes

~ c) se puede intentar colocar en 1-1,5-2 y sus derivadas. Esto es aproximadamente igual a colocar en 1-1,01-1,46-1,47-1,99-2, pero no mejora el $\varepsilon$.

finalmente, tomamos el polinomio

$$P(x) = 3{,}6795 - 6{,}5375x + 6{,}2871x^2 - 3{,}1999x^3 + 0{,}8633x^4 - 0{,}0927x^5$$

con $\varepsilon \simeq 3 \cdot 10^{-4}$ en $[1, 2]$

Ajustar un polinomio adecuado a $I = \int_0^x \text{sen}\, x^2\, dx$ para $0 \le x \le 1$

~ a) partimos de la siguiente tabla de valores

| $x$ | $I(x) = \int_0^x \text{sen}\, x^2\, dx$ | $x$ | $I(x) = \int_0^x \text{sen}\, x^2\, dx$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.5 | $4.148102433 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.1 | $3.333309528 \cdot 10^{-4}$ | 0.6 | $7.133622805 \cdot 10^{-2}$ |
| 0.2 | $2.666361926 \cdot 10^{-3}$ | 0.7 | 0.112387434 |
| 0.3 | $8.994794215 \cdot 10^{-3}$ | 0.8 | 0.165738060 |
| 0.4 | $2.12943556 \cdot 10^{-2}$ | 0.9 | 0.231847010 |
| | | 1 | 0.310268302 |

~ b) ajuste a una función potencial por mín-cuadr.

resulta $y = ax^b$ con $\begin{cases} a = 0{,}321195505 \\ b = 2{,}976075684 \end{cases}$, $r^2 = 0{,}99994$

~ c) ajuste a un $P(x)$ cuadrático por mín-cuadr.

resulta $y = a + bx + cx^2$ con $\begin{cases} a = 0{,}00954523 \\ b = -0{,}16179753 \\ c = 0{,}454769614 \end{cases}$

$r^2 \simeq 0{,}9967$

~ d) ajuste a un $P(x)$ cúbico por mín-cuadr.

obtenemos $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ con $\begin{cases} a = 0{,}0007845814091 \\ b = -0{,}02253279182 \\ c = 0{,}08974261793 \\ d = 0{,}2433513309 \end{cases}$

~ e) ajuste a un $P(x)$ cuártico de colocación en 0 - 0,1 - 0,2 - 0,3 - 1

- el resultado es $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, donde $\begin{cases} a = -0{,}04473619 \\ b = 0{,}35945054 \\ c = -0{,}004718562 \\ d = 0{,}0002554287 96 \\ e = 0 \end{cases}$

- el error máximo $\varepsilon \simeq 0{,}0029$, para $x = 0{,}4$, $P(x) = 0.02121$, $x = 0{,}8$, $P(x) = 0.16291$
$= 0{,}5$ $= 0.04108$, $= 0{,}9$ $= 0.22911$
$= 0{,}6$ $= 0.07030$,
$= 0{,}7$ $= 0{,}11042$,

~ f) ajuste a un $P(x)$ de 4º grado, colocación en $0 - 0,2 - 0,5 - 0,8 - 1$

como antes, $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, con
$$\begin{cases} a = -0,125420906 \\ b = 0,491355178 \\ c = -0,062933675 \\ d = 0,0072677047 \\ e = 0 \end{cases}$$

este tiene $\varepsilon \simeq 0,0004$

~ g) ahora, $P(x)$ de 5º grado, con colocación en $0 - 0,2 - 0,4 - 0,6 - 0,8 - 1$

obtenemos $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$, donde
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -0,0023578087 \\ a_2 = 0,026311 9039 \\ a_3 = 0,229925718 \\ a_4 = 0,178040669 \\ a_5 = -0,121652708 \end{cases}$$

esto tiene un error máximo $\varepsilon \simeq 0,00007$

Conclusiones:

~ en el apartado a) hemos obtenido $y \simeq 0,32\, x^{2,98} \simeq \frac{1}{3} x^3$ con $r^2 \simeq 0,99994$

esto sugiere que $I(x)$ tiene carácter de función cúbica. Según esto formamos la tabla siguiente

| $x$ | $\sqrt[3]{3I(x)}$ | $x$ | $\sqrt[3]{3I(x)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.5 | 0.499256325 |
| 0.1 | 0.0999976197 | 0.6 | 0.598150 4939 |
| 0.2 | 0.1999923812 | 0.7 | 0.696006032 |
| 0.3 | 0.2999421468 | 0.8 | 0.792223 7086 |
| 0.4 | 0.3997562407 | 0.9 | 0.886014681 |
| | | 1 | 0.976381 5282 |

~ los valores de $\sqrt[3]{3I(x)}$ parecen bastante lineales con los de $x$.

esto sugiere ensayar el cúbico de mínimos cuadrados ó el de quinto grado de colocación

~ a') cúbico de min - cuadr.

resulta ser $y' = a + bx + cx^2 + dx^3$ , con $\begin{cases} a = 0{,}000\,390796\,5545 \\ b = 0{,}9876\,08573 \\ c = 0{,}0350097\,4076 \\ d = -0{,}0661851\,6164 \end{cases}$

esto se comporta como $y' \simeq 0{,}99x + 0{,}06x^2 - 0{,}07x^3 \simeq x$ como se preveía

~ b') quinto grado de colocación en 0 - 0,2 - 0,4 - 0,6 - 0,8 - 1

este es $y' = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5$ , donde $\begin{cases} a_1 = 1{,}0000\,61759 \\ a_2 = -0{,}000\,6638\,4475 \\ a_3 = 0{,}00244\,637312 \\ a_4 = -0{,}00378105624 \\ a_5 = -0{,}02168170313 \end{cases}$

= de aquí resulta finalmente, haciendo $y' = \sqrt[3]{3I}$ y despejando $I$, que la mejor aproximación es

$$I = \int_0^x \operatorname{sen} x^2\,dx = (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5)^3$$

con $a_1 = 0{,}6934040988$ , $a_4 = -0{,}0026216\,37974$

$a_2 = -0{,}000460284\,2419$ , $a_5 = -0{,}0150332\,5332$

$a_3 = 0{,}0016\,96220384$ , $\varepsilon \simeq 2 \cdot 10^{-6}$

esto da 5 decimales exactos en $[0,1]$

Otro enfoque =

- desarrollando $\operatorname{sen} x^2$ en serie de Taylor, integrando entre $0$ y $x$ y poniéndolo bonito, resulta

$$I = \int_0^x \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\,(1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4)$$

con $a_1 = -1/14$ , $a_4 = 1/2298240$

$a_2 = 1/440$ , $z = x^4$

$a_3 = -1/25200$ , $\varepsilon \simeq < 10^{-9}$

que da 9 decimales exactos en $[0,1]$ y supera con mucho a la otra aproximación

## Ejemplo de ajuste de una función de dos variables independientes

– 1) Se pretende ajustar la función de dos variables independientes, $a$, $b$, definida como sigue:

~ tenemos la ecuación $\underline{x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0}$, cuya raíz real es $x = x_1$

y para la cual, $\underline{0 \leq a \leq 0{,}8}$, $\underline{0 \leq b \leq 0{,}8}$

es evidente que la raíz es función de los coeficientes $a$, $b$

$$\underline{x = F(a, b)}$$

~ formamos una tabla de valores en el intervalo dado $[0, 0{,}8]$, con 5 decimales.

| x | b = 0 | b = 0.2 | b = 0.4 | b = 0.6 | b = 0.8 |
|---|---|---|---|---|---|
| a = 0 | −1 | −0,93344 | −0,86756 | −0,80317 | −0,74114 |
| a = 0.2 | −1,07131 | −1 | −0,92871 | −0,85833 | −0,78991 |
| a = 0.4 | −1,15266 | −1,07676 | −1 | −0,92327 | −0,84775 |
| a = 0.6 | −1,24507 | −1,16506 | −1,08311 | −1 | −0,91693 |
| a = 0.8 | −1,34928 | −1,26597 | −1,17959 | −1,09060 | −1 |

~ pues bien, debemos hallar una función de tipo polinómico que aproxime a esta dada, con las siguientes condiciones:

- exactitud de 5 decimales para $a \leq 0{,}8$, $a \geq 0$, $b \leq 0{,}8$, $b \geq 0$
- fácil de programar
- rápida de ejecución y poco gasto en pasos de programa

~ para ello, buscamos una función polinómica de dos variables $a$, $b$. Puesto que la tabla tiene 25 puntos-dato, buscamos un $P(x, y)$ de cuarto grado en las dos variables que se coloque en los 25 puntos considerados. Comenzamos con la variable $b$.

para $a = 0$, $P(0, b) = -0{,}00156\, b^4 - 0{,}015\, b^3 + 0{,}00094\, b^2 + 0{,}33323\, b - 1$

" $a = 0.2$, $P(0{,}2, b) = -0.00417\, b^4 - 0{,}01354\, b^3 + 0{,}00904\, b^2 + 0{,}35532\, b - 1{,}07131$

" $a = 0.4$, $P(0.4, b) = -0{,}00755\, b^4 - 0.00948\, b^3 + 0.01855\, b^2 + 0.37623\, b - 1.15266$

" $a = 0.6$, $P(0{,}6, b) = -0.01094\, b^4 - 0.00313\, b^3 + 0.02919\, b^2 + 0.39443\, b - 1.24507$

" $a = 0{,}8$, $P(0.8, b) = \underbrace{-0.01406\, b^4}_{A_4(a)} + \underbrace{0.00729\, b^3}_{A_3(a)} \underbrace{+ 0.03794\, b^2}_{A_2(a)} + \underbrace{0.40878\, b}_{A_1(a)} \underbrace{- 1.34928}_{A_0(a)}$

~ y hemos obtenido una serie de polinomios, cada uno en la sola variable $b$, que colocabam a la tabla por filas. Ahora, suponemos esos polinomios como particularizaciones para un valor dado de $a$ de otro polinomio de coeficientes variables $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$ que sólo dependen de $a$. Ajustando pol. de 4º grado, resulta:

$$\begin{cases} A_0(a) = 0{,}00729\,a^4 - 0{,}03\,a^3 - 0{,}10954\,a^2 - 0{,}3335\,a - 1 \\ A_1(a) = 0{,}01085\,a^4 - 0{,}04505\,a^3 + 0{,}00925\,a^2 + 0{,}11032\,a + 0{,}33323 \\ A_2(a) = -0{,}07107\,a^4 + 0{,}07943\,a^3 - 0{,}01018\,a^2 + 0{,}03995\,a + 0{,}00094 \\ A_3(a) = 0{,}05425\,a^4 - 0{,}07161\,a^3 + 0{,}06033\,a^2 - 0{,}00234\,a - 0{,}015 \\ A_4(a) = -0{,}01356\,a^4 + 0{,}03255\,a^3 - 0{,}0255\,a^2 - 0{,}00911\,a - 0{,}00156 \end{cases}$$

y en resumen, ha quedado

$$x = F(a,b) = A_0(a) + A_1(a)\cdot b + A_2(a)\,b^2 + A_3(a)\cdot b^3 + A_4(a)\cdot b^4$$

que cumple todas las condiciones: - exactitud de 5 decimales en $0 \le a \le 0{,}8$, $0 \le b \le 0{,}8$
- fácil de programar, rapidez de ejecución y economía de pasos.

La función se coloca en los 25 puntos $(a_i, b_i, x_i)$ para $a = 0, 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8$
$b = 0, 0{,}2, 0{,}4, 0{,}6, 0{,}8$

~ Interpolaciones y predicciones:

~ Interpolar ≡
- (0,25 - 0,5) = -0,90939 (exacto), (0,5 - 0,25) = -1,09964 (exacto), (0,75 - 0,25) = -1,21842 (ex.)
- (0,25 - 0,25) = -1,00000 ( " ), (0,5 - 0,5) = -1,00000 ( " ), (0,75 - 0,50) = -1,11056 (-1)
- (0,25 - 0,75) = -0,82073 ( " ), (0,5 - 0,75) = -0,90044 ( " ), (0,75 - 0,75) = -1,00000 (ex.)
- (0,1 - 0,3) = -0,93116 ( " ), (0,5 - 0,7) = -0,92023 (+1), (0,3 - 0,1) = -1,07393 ( " )
- (0,3 - 0,5) = -0,92609 ( " ), (0,5 - 0,3) = -1,07981 (ex), (0,7 - 0,1) = -1,25511 (-1)
- (0,7 - 0,3) = -1,17702 ( " ), (0,1 - 0,7) = -0,79678 (+1), $\left(\frac{1}{\pi}, \frac{1}{e}\right)$ = -0,98151 (-1)

~ Predecir ≡ (0 - 1) = -0,68240 (38), (1 - 1) = -0,99965 (99), (1 - 0) = -1,46575 (57)

Coeficientes exactos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $0{,}0072916\overline{6}$ | $-0{,}03$ | $-0{,}1095416\overline{6}$ | $-0{,}3335$ | $-1$ |
| 0,01085069 | -0,045052078 | 0,009253471 | 0,110322916 | 0.333225 |
| -0,071072049 | 0,079427084 | -0,010177952 | 0,039947917 | 0,0009375 |
| 0,054253474 | -0,071614585 | 0,060329861 | -0,00234375 | -0,015 |
| -0,01356337 | 0,03255 2088 | -0,025499135 | -0,00911458 3 | -0,0015625 |

$\boxed{\text{Ajuste mini - max} = \text{ajustar } y = ax^2 + bx + c \text{ a } \Gamma(x) \text{ para } 1 \le x \le 2}$

- buscamos la parábola mini - max para esa función

escogemos la cuádrupla inicial

| x | 1 | 1.33 | 1.66 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Γ(x) | 1 | 0.893378 | 0.901668 | 1 |

~ para ella, el programa "Parábola mini-max" proporciona

$$y = 0{,}459888\,x^2 - 1{,}372291\,x + 1{,}908715$$

con $h = 0{,}003687$ en la cuádrupla

~ fuera de la cuádrupla, descubrimos revisando a intervalos de 0.1, un error máximo cerca de 1.2. Revisando su proximidad a intervalos 0.01, se halla el error maximo en

$$x = 1.19, \quad h_{max} = 0{,}006052$$

así que elegimos la nueva cuádrupla

| x | 1 | 1.19 | 1.66 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| Γ(x) | 1 | 0.920885 | 0.901668 | 1 |

cuya parábola es $y = 0{,}465398\,x^2 - 1{,}386945\,x + 1{,}916924$

con $h = 0{,}004624$ en la cuádrupla.

- fuera de ella, revisando a intervalos de 0.01, no se halla ningún $h_{max}$ mayor que $h = 0{,}004624$

Luego esta cuádrupla es la última. La parábola mini-max para $\Gamma(x)$ entre $1 \le x \le 2$, es

$$\underline{y = 0{,}465398\,x^2 - 1{,}386945\,x + 1{,}916924}$$

con error máximo $\underline{h = 0{,}004624}$ en $1 \le x \le 2$

(puesto que el error es del orden de $10^{-3}$, las dos últimas cifras de los coeficientes pueden redondearse sin afectarlo mucho. Redondear a 4 decimales, da $h \approx 0{,}0047$ )

Ajuste por min. cuadr. = ajustar $P(x)$ de grado 4 a $y = e^{\frac{x+1}{2}}$ sobre $-1 \leq x \leq 1$

– ) puesto que se trata de una función analítica, adoptamos polinomios ortogonales

$$\left.\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x) &= \tfrac{1}{2}(5x^3-3x) \\ P_4(x) &= \tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} y(x)\, P_0(x)\, dx \\ &\;\vdots \\ a_4 &= \frac{9}{2}\int_{-1}^{1} y(x)\, P_4(x)\, dx \end{aligned}$$

y en general, $a_k = \dfrac{2k+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} y(x)\, P_k(x)\, dx$

– calculamos pues las siguientes integrales,

$$a_0 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^{\frac{x+1}{2}} dx = 1.718281828 \quad , \quad a_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} e^{\frac{x+1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(5x^3-3x)\,dx = 0.013931258 3$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} e^{\frac{x+1}{2}} \cdot x\, dx = 0.845154516 \quad , \quad a_4 = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1} e^{\frac{x+1}{2}} \cdot \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\,dx = 0.000992598 5$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} e^{\frac{x+1}{2}} \cdot \frac{1}{2}(3x^2-1)\, dx = 0.139864004$$

– de aquí, hemos obtenido

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + a_3 P_3(x) + a_4 P_4(x) = \\ &= 1{,}718281828 + 0{,}845154516\, x + 0{,}139864004 \cdot \tfrac{1}{2}(3x^2-1) + \\ &\quad + 0{,}0139312583 \cdot \tfrac{1}{2}(5x^3-3x) + 0.0009925985 \cdot \tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \end{aligned}$$

– que, pasado a potencias de x, da finalmente.

$$e^{\frac{x+1}{2}} \simeq 1{,}64872205 + 0{,}824257629\, x + 0{,}206073762\, x^2 + 0{,}034828146\, x^3 + 0{,}004342618\, x^4$$

esto es el polinomio de 4º grado por min. cuadrad. para esa función

da un error máximo $\varepsilon = 0{,}000058$ y garantiza 4 decimales exactos en $-1 \leq x \leq 1$

esto puede fácilmente transformarse en

$$e^x \simeq 1{,}000000472 + 0{,}999873047\, x + 0{,}499960219\, x^2 + 0{,}168994707\, x^3 + 0{,}042142895\, x^4$$

que en $-1 \leq x \leq 1$ tiene $\varepsilon = 0{,}0073$, comparado con $\varepsilon = 0{,}0099$ del de 4º grado por Taylor

## Ajuste de funciones : $\Gamma^{-1}(x)$ para $1 \le x \le 19!$

~ **Objetivo** ≡ ~ se trata de hacer un programa que pueda calcular la $\Gamma(x)$ inversa para todos los valores $1 \le x \le 19!$, con precisión de al menos 7 cifras. El ajuste de funciones para esa precisión no resulta económico en pasos de programa, y gasta excesivas memorias.

~ por ello, tratamos de hallar una función lo más simple posible, que de unas aproximaciones iniciales para un método de Newton, el cual las dejará con 7-8 cifras exactas

~ **Problemas** ≡ ~ la dificultad consiste en que el método de Newton aplicado a esta función, puede (si las aproximaciones no son suficientemente buenas) diverger, o converger excesivamente despacio. Por ello, necesitamos aproximaciones muy buenas

~ **Desarrollo** ≡ formamos la tabla

| x | x! | x | x! | x | x! |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 5040 | 13 | 6227020800 |
| 2 | 2 | 8 | 40320 | 14 | $8,71782912 \cdot 10^{10}$ |
| 3 | 6 | 9 | 362880 | 15 | $1,307674368 \cdot 10^{12}$ |
| 4 | 24 | 10 | 3628800 | 16 | $2,092278989 \cdot 10^{13}$ |
| 5 | 120 | 11 | 39916800 | 17 | $3,556874281 \cdot 10^{14}$ |
| 6 | 720 | 12 | 479001600 | 18 | $6,402373706 \cdot 10^{15}$ |

en ella observamos que el caracter de $x!$ $(=\Gamma(x+1))$ es más o menos exponencial respecto al de $x$. Por ello, a la inversa, $x$ se comporta logarítmicamente respecto del crecimiento de $x!$. Por ello, consideramos logaritmos de los factoriales, y cambiamos las escalas y denominaciones, para mayor conveniencia.

| x | y | x | y | x | y |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 6 | 8,525161361 | 12 | 22,55216385 |
| 1 | 0,6931471806 | 7 | 10,6046029 | 13 | 25,19122118 |
| 2 | 1,791759469 | 8 | 12,80182748 | 14 | 27,89927138 |
| 3 | 3,17805383 | 9 | 15,10441257 | 15 | 30,67186011 |
| 4 | 4,78749174З | 10 | 17,50230785 | 16 | 33,50507345 |
| 5 | 6,579251212 | 11 | 19,9872145 | 17 | 36,39544521 |

~ a estos datos ajustamos algo sencillo, una curva $y = ax^b$

resulta $a = 0{,}6859552695$ , $r^2 = 0{,}99966633$

$b = 1{,}404492791$

$\Rightarrow \quad \hat{y} \simeq 0{,}6859552695 \; x^{1{,}404492791}$

que es un ajuste bastante logrado, en vista del $r^2 \simeq 1$ que tiene. De aquí, su inverso es

$$\hat{x} \simeq 1{,}307848759 \; y^{0{,}7120008066}$$

y volviendo las cosas a su sitio, hemos obtenido

$$\Gamma^{-1}(x) \simeq 2 + 1{,}307848759 (Lx)^{0{,}7120008066}$$

, cuya tabla de valores es, con 2 decimales.

| x | $\simeq \Gamma^{-1}(x)$ | x | $\simeq \Gamma^{-1}(x)$ | x | $\simeq \Gamma^{-1}(x)$ | x | $\simeq \Gamma^{-1}(x)$ | x | $\simeq \Gamma^{-1}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1! | 2,00 | 5! | 5,99 | 9! | 10,03 | 13! | 14,02 | 17! | 17,94 |
| 2! | 3,01 | 6! | 7,00 | 10! | 11,04 | 14! | 15,01 | 18! | 18,91 |
| 3! | 3,98 | 7! | 8,01 | 11! | 12,04 | 15! | 15,99 | 19! | 19,87 |
| 4! | 4,98 | 8! | 9,03 | 12! | 13,03 | 16! | 16,97 | – | – |

y vemos que, prescindiendo de los dos últimos, la aproximación es prácticamente del orden de la media décima o mejor.

Como sólo se tomaron resultados con dos decimales, tomamos los coeficientes con sólo 3 decimales.

~ Resumen ≡

hemos obtenido la aproximación

$$\Gamma^{-1}(x) \simeq 2 + 1{,}308 \, Lx^{0{,}712} \quad , \quad 1 \le x \le 19!$$

- simplicidad de cálculo
- poco tiempo de evaluación
- pocos pasos de programa y memorias
- proporciona aproximaciones con casi dos decimales para $1 \le x \le 19!$

incluso, se mejora la precisión adoptando $\Gamma^{-1}(x) \simeq 2 + 1{,}31 \, Lx^{0{,}712}$

o incluso $2 + 1{,}31 \, Lx^{0{,}71}$ (esta última es más eficiente para $16! \le x \le 19!$)

# Inversa de una matriz 4x4

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| LBL E | P⇄S | 5 | RCL A | GTO 3 | 1/x |
| P⇄S | CHS | × | x=y | − | STO 6 |
| GSB 4 | STO× 5 | 1 | GTO 0 | x≠y | STO×2 |
| STO × 8 | STO × 7 | + | RCL (i) | GTO 0 | P⇄S |
| CHS | GSB 5 | STO A | RCL A | LBL 3 | STO× 4 |
| P⇄S | GSB 9 | RCI | x⇄I | DSZ | RTN |
| STO×3 | P⇄S | x=y | x⇄y | RTN | LBL 9 |
| STO × 4 | STO×9 | GTO 3 | RCL(i) | LBL B | RCL 1 |
| STO × 5 | CHS | RCL D | ÷ | SF0 | 1/x |
| P⇄S | STO×2 | 3 | RCL B | LBL A | STO 1 |
| 1 | STO×3 | − | x⇄I | 1 | STO×5 |
| 6 | LBL 5 | STO B | x⇄y | 6 | P⇄S |
| ST I | STO×(i) | 4 | RCL(i) | ST I | STO×3 |
| GSB 7 | LBL 7 | + | × | LBL 2 | RTN |
| P⇄S | GSB a | STO D | RCL 0 | F0 ? | |
| GSB 9 | GSB a | 4 | x⇄I | RCL(i) | |
| STO×7 | GSB a | × | x⇄y | R/S | |
| CHS | LBL a | − | STO+(i) | STO(i) | |
| STO×9 | RCI | STO 0 | R↑ | DSZ | |
| P⇄S | 1 | LBL 0 | x⇄I | GTO 2 | |
| STO×0 | − | RCL B | RCL D | CLx | |
| P⇄S | 4 | 4 | RCL B | CF0 | |
| GSB 5 | ÷ | STO+0 | 1 | RTN | |
| GSB 4 | INT | + | 2 | LBL 4 | |
| STO × 0 | STO D | STO B | x=y | RCL 6 | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 139 |

| INVERSA DE UNA MATRIZ 4x4 | | |
|---|---|---|
| ENTRADA | SALIDA | → $A^{-1}$ |

## características

- 139 pasos (85 libres)
- 21 memorias (RS7, RS8, RS9, C, E libres)
- 100 segundos

## status

- FIX 2, CF0, CF1, CF2, CF3, DEG
- libres etiquetas C, D, b, c, d, e, 1, 6, 8

## instrucciones

- entrada, A, $a_{11}$ R/S $a_{12}$ R/S ··· $a_{44}$ R/S → 0.00
- calculo, E → $a'_{11}$ R/S $a'_{12}$ R/S ··· $a'_{44}$ R/S → 0.00
- salida, B → $a_{11}$ R/S $a_{12}$ R/S ··· $a_{44}$ R/S → 0.00

(si ocurre Error y $|A| \neq 0$, introducir A de nuevo con filas cambiadas de orden, y luego en la $A^{-1}$ revertir al orden inicial, pero con las columnas)

## Ejemplos

1) - Hallar la inversa de la matriz dada:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 11 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 70 & -1 & 7 & -71 \\ -252 & 4 & -25 & 255 \\ 121 & -2 & 12 & -122 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2) - Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rrrrl} 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & -7x_4 & = 1 \\ 6x_1 & -14x_2 & +8x_3 & -2x_4 & = 0 \\ 4x_1 & -4x_2 & -4x_3 & -7x_4 & = 0 \\ -3x_1 & +2x_2 & -5x_3 & +6x_4 & = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & -7 \\ 6 & -14 & 8 & -2 \\ 4 & -4 & -4 & -7 \\ -3 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.58 & 0.01 & 0.12 & -0.53 \\ -0.21 & -0.06 & 0.00 & -0.27 \\ 0.01 & 0.01 & -0.10 & -0.10 \\ -0.21 & 0.04 & -0.02 & -0.09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5798 \\ -0.2142 \\ 0.0068 \\ -0.2128 \end{bmatrix}$$

3) - Invertir la matriz de Hilbert de 4º orden

$$\begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{vmatrix}$$

# Sistema de ecuaciones 7X7

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | R/S | ISZ | RCL E | ISZ | + | RCL 0 | GTO 7 | RCL B |
| 1 | STO(i) | x≠y | x=y | R↓ | RCL 0 | − | RCL D | ÷ |
| STO+0 | GSB d | GTO 2 | GTO b | x⇄I | − | STO B | RCL B | FRAC |
| R↓ | RC I | R↓ | 1 | x≤y | RTN | LBL 8 | − | x≠0 |
| LBL B | ISZ | R↓ | − | GTO c | LBL e | RCL(i) | STO D | GTO 9 |
| STO E | x≠y | 2 | 9 | LBL a | 9 | STO E | x>0 | LASTX |
| 2 | GTO 4 | 4 | RCL 0 | RCL E | RCL 0 | ISZ | GTO 8 | RCL 0 |
| 5 | RCL E | RCL 0 | − | 1 | − | LBL 7 | RCL B | x=y |
| RCL 0 | 1 | − | × | + | RCL 0 | RC I | 1 | RTN |
| − | STO E | RCL E | ST I | STO E | 1 | RCL D | ST I | 1 |
| ST I | R↓ | + | ISZ | 2 | − | + | STO D | − |
| LBL 6 | LBL 1 | ST I | RCL D | 3 | × | x⇄I | − | RCL D |
| 2 | x=0 | LBL 0 | RCL(i) | + | 1 | RCL(i) | STO B | x=y |
| 4 | GTO a | 2 | − | RCL 0 | + | x⇄y | LBL 9 | GTO 9 |
| x=y | GSB e | 4 | STO D | − | RTN | x⇄I | RC I | 1 |
| GTO 5 | ST I | − | ISZ | ST I | LBL b | x⇄y | RCL D | + |
| R/S | R↓ | x=0 | GSB d | 2 | 1 | RCL E | + | STO D |
| STO(i) | GSB d | GTO 3 | GSB e | 4 | x=y | × | x⇄I | GTO 9 |
| ISZ | (R)↑ | R↓ | LBL c | x=y | RTN | STO−(i) | RCL(i) | LBL C |
| RC I | LBL 2 | STO÷(i) | RCL(i) | GTO E | ST I | RC I | x⇄y | CLREG |
| GTO 6 | R↓ | ISZ | ISZ | RCL(i) | GSB e | ISZ | x⇄I | RTN |
| LBL 5 | x⇄y | RC I | x⇄y | GTO 1 | 2 | RCL B | x⇄y | |
| GSB e | STO÷(i) | GTO 0 | x⇄I | LBL d | − | ÷ | STO(i) | |
| ST I | x⇄y | LBL 3 | x⇄y | GSB e | STO D | FRAC | RC I | |
| LBL 4 | RC I | RCL 0 | STO−(i) | 7 | 9 | x≠0 | ISZ | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 221 |

## características

- 221 pasos
- 26 memorias
- 700 segundos

## startup

- FIX 4, DEG
- Libres las etiquetas D, E

## instrucciones

- START, C
- introducción de filas

$a_{11}$ A, $a_{12}$ R/S --- $b_1$ R/S
$a_{21}$ A, $a_{22}$ R/S -- $b_2$ R/S
-- -- -- -- --
$a_{71}$ A, $a_{72}$ R/S -- $b_7$ R/S

- recuperar soluciones

RCL1 → $x_1$, RCL2 → $x_2$, ---
RCL7 → $x_7$.

## Ejemplos

1) - Resolver el sistema.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 7 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 &= 0 \\
5x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 2x_5 - 3x_6 + x_7 &= 0 \\
4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 - x_6 - 4x_7 &= 0 \\
3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 - 3x_5 - 2x_6 - x_7 &= 0 \\
2x_1 - 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 5x_7 &= 0 \\
x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + 4x_7 &= 0
\end{aligned}
$$

la solución es $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = 1$

calculada, resulta

$x_1 = 1 + 24e$ , $x_5 = 1 - 6e$

$x_2 = 1 - e$ , $x_6 = 1 + 16e$

$x_3 = 1 + 10e$ , $x_7 = 1 + 1.e$

$x_4 = 1 + 8e$ , donde $e = 10^{-9}$

| SISTEMA DE ECUACIONES 7X7 | | |
|---|---|---|
| COMIENZOS DE FILA | RECOMIENZOS DE FILA | START |

- Si resulta Error al introducir una fila y el sistema no es singular, reintroducirla de nuevo más tarde, alterando el orden de filas. Para introducir una fila después de un error, utilizar la tecla B en vez de la A, y luego R/S

Hallar un mínimo $1 \leq x \leq 2$ de $y = \Gamma(x)$

a) utilizamos una tabla de $\Gamma(x)$ de 5 cifras ($h = 0.01$)

| $x$ | 1.44 | 1.45 | 1.46 | 1.47 | 1.48 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma(x)$ | 0.88581 | 0.88566 | 0.88560 | 0.88563 | 0.88575 |

≡ utilizando interpolación de 4º grado:

$\Gamma(x) \simeq 0.45\,x^2 - 1.3155\,x + 1.84701$ (de 2º grado, $\Delta^3 = \Delta^4 = 0$)

$\Gamma'(x) \simeq 0.9\,x - 1.3155$

haciendo $\Gamma'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1.3155}{0.9} = \underline{1.461667}$

sustituido arriba, $\Gamma(x_M) = \underline{0.885599}$

b) utilizando una tabla de $\Gamma(x)$ de 8 cifras ($h = 0.01$)

| $x$ | 1.44 | 1.45 | 1.46 | 1.47 | 1.48 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma(x)$ | 0.8858 0506 | 0.8856 6138 | 0.8856 0434 | 0.8856 3312 | 0.8857 4696 |

≡ utilizando interpolación de 4º grado:

$\Gamma(x) \simeq 0.25\,x^4 - 1.591\hat{6}\,x^3 + 4.203175\,x^2 - 5.20841683\,x + 3.34795858$

que tiene un mínimo en $\underline{x = 1.461632442}$

$\Gamma(x) = 0.88560320\,7$ (por aprox. 4º grado)

$\underline{\Gamma(x) = 0.88560319\,0}$ (por series)

c) utilizando una tabla de $\Gamma(x)$ de 8 cifras ($h = 0.00001$)

| $x$ | 1.46161 | 1.46162 | 1.46163 | 1.46164 | 1.46165 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma(x)$ | 0.88560319 | 0.88560319 | 0.88560319 | 0.88560319 | 0.88560320 |

que no resulta útil.

- finalmente, damos como resultado

$$\boxed{\begin{array}{l} x \simeq 1.46163 \\ \Gamma(x) \simeq 0.8856032 \end{array}}$$

comprobación: $\Gamma'(x) = \frac{\Gamma'(x+2) - (2x+1)\Gamma(x)}{x^2 + x}$, donde $\Gamma'(x+2) \simeq 3,47445$

# Polinomio de colocación: grados 2,3,4

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | RCL 1 | RCL 6 | RCL 8 | + | × | RCL 4 | F0? | × |
| L | RCL 2 | RCL 2 | RCL 0 | RCL 2 | RCL 0 | RC I | x≠0 | RCL D |
| GTO L | RCL 0 | GSB 0 | GSB 0 | × | RCL 2 | × | −x− | + |
| LBL B | GSB 0 | STO E | GTO 3 | RCL D | × | RCL 2 | RCL B | × |
| 3 | STO D | RCL C | LBL 0 | − | RCL 4 | RCL 0 | F1? | RCL E |
| GTO 1 | RCL 5 | RCL 6 | − | RCL 0 | × | × | −x≠0 | + |
| LBL C | RCL 3 | RCL 0 | R↓ | × | RCL A | + | −x− | RTN |
| 5 | RCL 4 | GSB 0 | − | RCL 1 | × | RCL A | RCL C | LBL d |
| GTO 1 | RCL 2 | STO B | R↑ | + | − | × | −x− | F0? |
| LBL D | GSB 0 | F0? | ÷ | STO E | RC I | + | RCL D | GTO 6 |
| 7 | STO E | GTO 4 | RTN | RCL B | RCL C | RCL C | −x− | SF 0 |
| GTO 1 | RCL D | RCL 9 | LBL 5 | RCL A | × | + | RCL E | 3 |
| LBL E | RCL 4 | RCL 7 | CLX | RCL 6 | − | STO C | −x− | RTN |
| 9 | RCL 0 | RCL 8 | STO B | × | RCL D | RCL B | RTN | LBL 6 |
| LBL 1 | GSB 0 | RCL 6 | LBL 4 | − | + | RC I | LBL e | F1? |
| STI | STO C | GSB 0 | CLX | RCL 4 | STO D | RCL 4 | ↑ | GTO 6 |
| R↓ | F1? | RCL A | LBL 3 | RCL 2 | RCL A | + | ↑ | SF 1 |
| STO (i) | GTO 5 | RCL 8 | STO A | RCL 0 | RCL 6 | RCL 6 | ↑ | 2 |
| x⇄y | RCL 7 | RCL 4 | RCL 6 | + | × | + | RCL A | RTN |
| DSZ | RCL 5 | GSB 0 | × | ST I | RCL B | RCL A | × | LBL 6 |
| LBL 1 | RCL 6 | RCL E | RCL B | × | − | × | RCL B | CF 0 |
| STO (i) | RCL 4 | RCL 8 | − | RCL 2 | RC I | − | + | CF 1 |
| RTN | GSB 0 | RCL 2 | RCL 4 | RCL 0 | RCL 4 | STO B | × | 4 |
| LBL a | STO A | GSB 0 | × | × | + | LBL b | RCL C | RTN |
| RCL 3 | RCL E | RCL B | RCL C | + | × | RCL A | + | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 224 |

## características

- 224 pasos
- 12-14-16 memorias ($R_{50}$-$R_{59}$ libres
- 6-8-11 segundos

## status

- FIX 2, CF0, CF1, CF2, CF3 DEG
- libres etiquetas 2, 7, 8, 9, c

## instrucciones

- seleccionar grado (inic. grado 4)

  fD → 4, fD → 3, fD → 2, fD → 4, etc

- introducir puntos:

| POLINOMIO DE COLOCACIÓN GRADOS 2:3, 4 (R50- R59) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| [a] | [b] | [c] | [d] | [e] |
| RESOLVER | →COEFIC | | 4/3/2 | X→P(X) |
| $x_1 \uparrow y_1$ | $x_2 \uparrow y_2$ | $x_3 \uparrow y_3$ | $x_4 \uparrow y_4$ | $x_5 \uparrow y_5$ |

**Ejemplo**: Dada la siguiente tabla de datos, construir una tabla de $\Gamma(x)$ para 2 (0.1) 3 con 4 decimales

| x | 2 | 2.3 | 2.6 | 2.8 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Ln\Gamma(x)$ | 0 | 0.1541 8951 | 0.3574 1187 | 0.5167 0280 | 0.6931 4718 |

- ajustando un P(x) de cuarto grado a estos datos, resulta:

$$\Gamma(x) \simeq EXP(P(x)) = EXP(0.009067219x^4 - 0.130841046x^3 + 0.886598372x^2 - 1.843234031x + 1.04172744)$$

- evaluandolo para 2 (0.1) 3, resulta una tabla de $\Gamma(x)$ con 4 decimales:

| x | 2 | 2.1 | 2.2 | 2.4 | 2.5 | 2.7 | 2.9 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Gamma(x)$ | 1,0000 | 1.0465 | 1.1018 | 1.2422 | 1.3293 | 1.5447 | 1.8273 | 2.0000 |

y ha resultado la siguiente aproximacion

$$\Gamma(x) \simeq e^{0.0090672x^4 - 0.130841x^3 + 0.886598x^2 - 1.843234x + 1.041727}$$

que da 4 decimales exactas en $2 \leq x \leq 3$

# Numeros primos y factorizacion

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | INT | GTO 5 | − | GTO 8 | GSB 3 | GSB 3 | x⇄y | GSB e |
| STO B | x=y | SF 1 | LBL 0 | LBL 1 | x=0 | x=0 | ÷ | LBL 4 |
| ↑ | GTO 0 | RCL A | STO E | GSB a | RTN | RTN | LASTX | CLX |
| INT | 1 | RTN | RCL A | RCL B | 2 | 4 | x>y | F0? |
| x≠y | + | LBL C | RTN | RCL C | GSB 3 | GSB 3 | GTO 0 | SPACE |
| GTO 5 | LBL 0 | STO A | LBL D | x=y | x=0 | x=0 | x⇄y | RTN |
| 0 | 2 | RCL B | 0 | GSB e | RTN | RTN | INT | LBL E |
| STO D | x⇄y | − | STO D | 2 | 2 | 6 | LASTX | F0? |
| x⇄y | x=y | x<0 | RCL B | LBL 8 | GSB 3 | GSB 3 | x≠y | GTO 0 |
| x≤y | GTO 0 | GTO 5 | 2 | + | x=0 | x=0 | RTN | SF 0 |
| GTO 5 | 2 | RCL A | x⇄y | STO C | RTN | RTN | STO B | 1 |
| 2 | ÷ | INT | x=y | STO B | LBL 2 | 2 | F1? | RTN |
| EEX | INT | 2 | GTO 0 | RCL E | 4 | GSB 3 | CLX | LBL 0 |
| 9 | 2 | x⇄y | 1 | x⇄y | GSB 3 | x=0 | F1? | CF 0 |
| x⇄y | × | x=y | x≠y | x>y | x=0 | RTN | RTN | 0 |
| x>y | 1 | GTO 0 | GTO 1 | GTO 4 | RTN | 6 | RCL D | RTN |
| GTO 5 | + | 2 | GSB e | 0 | 2 | GSB 3 | GSB e | LBL e |
| CF 1 | LBL 0 | ÷ | + | STO D | GSB 3 | x=0 | 0 | F0? |
| GSB a | STO B | . | RCL E | GTO 1 | x=0 | RTN | GTO 3 | -x- |
| RTN | STO C | 5 | x⇄y | LBL a | RTN | GTO 2 | LBL 0 | F0? |
| LBL B | 2 | + | x>y | 2 | 4 | LBL 3 | F1? | RTN |
| STO A | EEX | INT | GTO 4 | GSB 3 | GSB 3 | RCL D | CLX | R/S |
| x<0 | 9 | 2 | LBL 0 | x=0 | x=0 | + | F1? | RTN |
| GTO 5 | STO E | × | GSB e | RTN | RTN | STO D | RTN | |
| ↑ | x≤y | 1 | 1 | 1 | 2 | RCL B | RCL B | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 223 |

**características**

- 223 pasos
- A, B, C, D, E memorias ocupadas

**status**

- FIX 2, DEG
- libres etiquetas 5, 6, 7, 9, b, c, d

**instrucciones**

- seleccionar PRINT ó R/S,

  E → 1 (PRINT), E → 0 (R/S), E → (1), etc.

- introducir N para factorizar

  N → factores = N, A → factores

- tabular primos $a \le p \le b$

  a, B

  b, C, D → $p_i$

| | | | |
|---|---|---|---|
| NUMEROS PRIMOS Y FACTORIZACION | | | |
| N → FACTORES | DESDE A | HASTA B | TABULAR P -x-? |

**tiempo** = para N = primo

$p \simeq 100 \to 5$ seg., $p \simeq 10^5 \to 75$ seg.
$p \simeq 1000 \to 9$ seg, $p \simeq 10^6 \to 235$ seg.
$p \simeq 10000 \to 25$ seg., $p \simeq 10^7 \to$

**Ejemplos**: en modo PRINT, factorizar 7331438, 11111, 10001

7331438 A → 2 → 31 → 118249 → 0 ⇒ 7331438 = 2 × 31 × 118249 ( 90 segundos )

11111 A → 41 → 271 → 0 ⇒ 11111 = 41 × 271 ( 16 segundos )

10001 A → 73 → 137 → 0 ⇒ 10001 = 73 × 137 ( 23 segundos )

2) Tabular primos entre 2600 y 2700

2600 B, 2700 C, D → 2609 → 2617 → 2621 → 2633 → 2647 → 2657 → 2659 → 2663 → 2671 → 2677 → 2683 → → 2687 → 2689 → 2693 → 2699 → 0

3) Descomponer en factores primos 5555551, 5551555, 7331437, 7331439

5555551 A → 773 → 7187 → 0, N = 773 × 7187

5551555 A → 5 → 1110311 → 0, N = 5 × 1110311

7331437 A → 17 → 53 → 79 → 103 → 0, N = 17 × 53 × 79 × 103

7331439 A → 3, → 37 → 257 → 257 → 0, N = 3 × 37 × $257^2$

7) Hallar el menor primo superior a 1000.000

$10^6$ B, $10^7$ C, D → 1000,003 , ⇒ P = 1000 003

## b) versión abreviada = factorización

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | 2 | GSB 3 | LBL 3 | $x \neq 0$ | CHS |
| STO B | GSB 3 | 4 | STO+9 | RTN | R/S |
| 0 | LBL 2 | GSB 3 | RCL B | LASTX | |
| STO 9 | 4 | 6 | RCL 9 | STO B | |
| 2 | GSB 3 | GSB 3 | ÷ | RCL 9 | |
| GSB 3 | 2 | 2 | LASTX | PAUSE | |
| 1 | GSB 3 | GSB 3 | $x > y$ | 0 | |
| GSB 3 | 4 | 6 | GTO 0 | GTO 3 | |
| 2 | GSB 3 | GSB 3 | $x < y$ | LBL 0 | |
| GSB 3 | 2 | GTO 2 | FRAC | RCL B | |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 52 |

**características**

- 52 pasos
- B, 9 memorias ocupadas

**status**

- FIX 0, DEG,
- libres etiquetas B, C, D, E, a, b, c, d, e, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9

**instrucciones**

- introducir N ; A → factores (el último, con signo −)

**Tiempos**, para N = primo

$p \simeq 100 \to 4$ seg. , $p \simeq 10.000 \to 21$ seg. , $p \simeq 1.000.000 \to 189$ seg. , $p = 10^x \to t = 7 \cdot 3^{x-3}$ seg.

$p \simeq 1000 \to 8$ seg. , $p \simeq 100.000 \to 60$ seg. , $p \simeq 10.000.000 \to 590$ " , $p = p \to t = \frac{7}{27} \cdot p^{\log_{10} 3}$ seg. $\simeq \frac{\sqrt{p}}{4}$

**Ejemplos**

97969 A → 313 → −313 ( t. previsto = 62 seg , t real = 62 seg )

101114 A → primo ( t. " = 63 " , " " = 63 " )

4321 A → 29 → −149 ( t = 9 seg. ) , 1234567891 =

7654321 A → 19 → −402859 , 1987654321 = 457 × 4349353 ,

**Miscelaneas**

$2x^4 + 16x^3 + x^2 - 74x + 56 = 0$ ; $x_1 = 1,123105626$ , $x_2 = 1,121320344$

$\sqrt{19x} - \sqrt{x-2} - x + \log x = \pi$ ; $x =$

**Breve subrutina para comprobación de flags**

| | |
|---|---|
| 0 | 2 |
| F0 ? | F2 ? |
| PSE | PSE |
| 1 | 3 |
| F1 ? | F3 ? |
| PSE | PSE |
| | $\pi$ |
| | RTN |

- también puede probarse desde teclado : estamos en el paso N

Fm ? — si el flag está puesto = N
— si no está puesto = N+1

en el caso de F2, F3, el test los borra. Es preciso reponerlos

# Resolución de $f(z) = 0$ por Newton

| SOLUCION DE F(z) = 0 POR NEWTON | | | | |
|---|---|---|---|---|
| SIN | EXP | + | × | INV |
| $Y_0 \uparrow X_0 \to$ raiz | STO 1 | STO 2 | $z_1^{z_2}$ | $z \to f(z)$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | LAST x | STO A | x⇄y | F2? | × | LBL e |
| STO 0 | CHS | x⇄y | 2 | GTO 2 | R↓ | SF 2 |
| x⇄y | GSB D | STO B | ÷ | x⇄y | + | RTN |
| STO 1 | 0 | COS | x⇄y | R↓ | R↑ | LBL C |
| x⇄y | RCL 2 | × | →R | + | →R | F2? |
| EEX | GSB d | RCL A | RCL B | R↓ | RTN | GTO 5 |
| CHS | STO −0 | $x^2$ | RCL A | + | LBL 3 | STO C |
| 5 | R↓ | 1 | GSB c | R↑ | →P | x⇄y |
| STO 2 | STO −1 | + | x⇄y | RTN | 1/x | ST I |
| + | RCL 0 | √ | CHS | LBL 2 | x⇄y | x⇄y |
| E | PAUSE | RCL B | GSB 1 | CHS | CHS | RTN |
| STO 3 | RCL 1 | SIN | CHS | x⇄y | x⇄y | LBL 5 |
| x⇄y | PAUSE | × | x⇄y | CHS | GTO 7 | RCL I |
| STO 4 | x⇄y | RTN | RTN | x⇄y | LBL B | RCL C |
| RCL 1 | GTO A | LBL 0 | LBL b | GTO c | F2? | RTN |
| RCL 0 | LBL a | STO B | F2? | LBL d | GTO 4 | LBL D |
| GSB E | x⇄y | x⇄y | GTO 1 | F2? | STO D | R↓ |
| RCL 4 | F2? | STO A | $e^x$ | GTO 3 | x⇄y | R↓ |
| RCL 3 | GTO 0 | RCL B | →R | →P | STO E | GSB 1 |
| R↓ | $e^x$ | RCL A | RTN | LBL 7 | x⇄y | GSB d |
| R↓ | ↑ | GSB d | LBL 1 | R↓ | RTN | GSB b |
| GSB 3 | 1/x | 1 | →P | R↓ | LBL 4 | RTN |
| 1 | − | − | LN | →P | RCL E | LBL E |
| − | 2 | →P | RTN | x⇄y | RCL D | RTN |
| 0 | ÷ | √ | LBL c | R↓ | RTN | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 |

## características

- 174 pasos (50 pasos libres)
- $R_{5,6,7,8,9}$ y los secundarios, libres

## status

- FIX 7, RAD,
- libres etiquetas 6, 8, 9

## instrucciones

$z = a + bi$, $f(z) = x + yi$

- definir $f(z)$

  GTO E, , definición, RTN,

- para hallar valores de $f(z)$, introducir $z$

  $b \uparrow a$, E → x, x⇄y → y

- para cualquier función incorporada,

  $b \uparrow a$, tecla(s) apropiada(s) → x, x⇄y → y

- para hallar raíces de $f(z)$, introducir primera aproximación $z_0 = a_0 + b_0 i$

  $b_0 \uparrow a_0$, A → $a_1, b_1$ → $a_2, b_2$ → ⋯ → $a_m, b_m$ →

## funciones definidas

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z$, f A → SIN($z$) | $z_1 \uparrow z_2$, f C → $z_1 + z_2$ | $z$, B → STO 1 | $z_1 \uparrow z_2$, D → $z_1^{z_2}$ |
| $z$, f B → EXP($z$) | $z_1 \uparrow z_2$, f E, f C → $z_1 - z_2$ | ■, f E, B → RCL 1 | $z$, E → $f(z)$ |
| $z$, f E, f A → $\mathrm{SIN}^{-1}(z)$ | $z_1 \uparrow z_2$, f D → $z_1 \cdot z_2$ | $z$, C → STO 2 | |
| $z$, f E, f B → LN($z$) | $z_1 \uparrow z_2$, f E, f D → $z_1 / z_2$ | ■, f E, C → RCL 2 | |

| $f(z)$ | subrutina |
|---|---|
| SIN $z$ | a |
| $\mathrm{SIN}^{-1} z$ | 0 |
| EXP $z$ | b |
| EOG $z$ | 1 |
| + | c |
| − | 2 |
| × | d |
| ÷ | 3 |
| STO 1 | B |
| RCL 1 | 4 |
| STO 2 | C |
| RCL 2 | 5 |
| $z_1^{z_2}$ | D |

- como operan, ($z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z = a + bi$)

- alteran la escala; SIN($z$), $\mathrm{SIN}^{-1}(z)$, $z_1^{z_2}$, +, −, ×, ÷

$$\begin{array}{c|c} T & - \\ Z & - \\ Y & b_1 \\ X & a_1 \end{array} \to \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{SIN}(z) \\ \mathrm{SIN}^{-1}(z) \end{array} \right\} \to \begin{array}{c|c} T & - \\ Z & - \\ Y & y \\ X & x \end{array} , \quad \begin{array}{c|c} T & b_1 \\ Z & a_1 \\ Y & b_2 \\ X & a_2 \end{array} \to \left\{ \begin{array}{l} + \; - \\ z_1^{z_2} \\ \times \\ \div \end{array} \right\} \to \begin{array}{c|c} T & - \\ Z & - \\ Y & y \\ X & x \end{array}$$

- no alteran la escala: EXP($z$), LN($z$), STO 1, STO 2, RCL 1, RCL 2

$$\begin{array}{c|c} T & t \\ Z & z \\ Y & b \\ X & a \end{array} \to \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{EXP}(z) \\ \mathrm{LN}(z) \end{array} \right\} \to \begin{array}{c|c} T & t \\ Z & z \\ Y & y \\ X & x \end{array} , \quad \begin{array}{c|c} T & t \\ Z & z \\ Y & b \\ X & a \end{array} \to \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{STO\,1} \\ \mathrm{STO\,2} \end{array} \right\} \to \begin{array}{c|c} T & t \\ Z & z \\ Y & b \\ X & a \end{array} , \quad \begin{array}{c|c} T & - \\ Z & - \\ Y & b \\ X & a \end{array} \to \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{RCL\,1} \\ \mathrm{RCL\,2} \end{array} \right\} \to \begin{array}{c|c} T & b \\ Z & a \\ Y & y \\ X & x \end{array}$$

- operaciones de inversión de funciones.

f E = INV = inversa de SIN($z$), EXP($z$), +, ×, STO 1, STO 2

## Ejemplos :

~ 1) Resolver $2 \operatorname{sen} z - z - 3 = 0$ , partiendo de $z_0 = 1+i$

- definimos $f(z)$ ⇒ GTO E ▥ , B (STO 1) , fA (SIN z) , 2 , x , x⇄y , 2 , x , x⇄y , fE (INV) } RCL 1 , B (STO 1) , fE (INV) { − , fC (+) } , 3 , − , RTN ▥

- introducir $z_0 = 1 \uparrow 1$ A ⇒
$$\begin{cases} z_1 = 1{,}337 + 1{,}596\,i \\ z_2 = 1{,}223 + 1{,}457\,i \\ z_3 = 1{,}2030 + 1{,}4515\,i \end{cases}$$
, $z_4 = 1{,}2028727 + 1{,}4516452\,i$ , $z_5 = 1{,}2028728 + 1{,}4516453\,i$ , R/S

- luego hemos obtenido una raiz, $z \simeq 1{,}2028728 + 1{,}4516453\,i$

- para hallar $f(z)$ : z E → $f(z) \simeq 2{,}10^{-9}$

~ 2) Resolver $2^x - 3x + 2 + 4i = 0$ , partiendo de $z_0 = 1+i$

- definimos $f(z)$ ⇒ GTO E ▥ , B (STO 1) , 0 ↑ 2 (2+0 i) , GSB 4 (RCL 1) , 2 D ($z_1 z_2$) , GSB 4 (RCL 1) , GSB 2 (−) , GSB 4 (RCL 1) , GSB 2 (−) , GSB 4 (RCL 1) , GSB 2 (−) , 2 , + , x⇄y , 4 , + , x⇄y , RTN ▥

- introducir $z_0 = 1 \uparrow 1$ A ⇒
$$\begin{cases} z_1 = 0{,}784 + 2{,}079\,i \\ z_2 = 0{,}811 + 1{,}904\,i \\ z_3 = 0{,}813588 + 1{,}9004717\,i \end{cases}$$
, $z_4 = 0{,}8135910 + 1{,}9004713\,i$ , $z_5 = 0{,}8135910 + 1{,}9004713\,i$ , R/S

- hemos obtenido la raiz , $z = 0{,}8135910 + 1{,}9004713\,i$

- para hallar $f(z)$ , z E → 0

~ 3) Complementos

- para ahorrar pasos de definición , emplean funciones incorporadas ⇒ ej: − = fE , fC = GSB 2

- todas las funciones son accesibles por teclado

- Ejplo ⇒ calcular $\sin(2+3i) - \operatorname{Log}(4+5i)$

3↑2 , fA , 5↑4, fE , fB , fE , fC → $7{,}2977131 + (-5.0649623)\,i$

- otras funciones, se definen con ayuda de las incorporadas .

$$\operatorname{Sh} z = \frac{\operatorname{EXP}(z) - \operatorname{EXP}(-z)}{2} \quad , \quad \operatorname{Ch} z = \frac{\operatorname{EXP}(z) + \operatorname{EXP}(-z)}{2} ,$$

$$\cos z = \sin(\pi/2 - z) \quad , \quad \operatorname{tg} z = \sin z / \sin(\pi/2 - z) ,$$

$$\cos^{-1} z = \pi/2 - \sin^{-1} z ,$$

Ecuación de 4º grado : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | STO 6 | 3 | STO ÷ 6 | ÷ | + | 4 | F2? | ÷ |
| STO 1 | RCL 2 | ÷ | ÷ | ↑ | RCL 3 | × | CHS | RCL 9 |
| RTN | RCL 4 | − | STO 9 | $x^2$ | 4 | − | RTN | CHS |
| LBL B | × | STO 9 | 3 | RCL 6 | × | x<0 | LBL 4 | √ |
| STO 2 | 4 | RCL 8 | $y^x$ | 2 | − | GTO 4 | CHS | STO 9 |
| RTN | ÷ | RCL 6 | + | × | ÷ | √ | √ | ÷ |
| LBL C | STO 7 | $x^2$ | x<0 | + | RCL 7 | RCL 9 | 2 | $\cos^{-1}$ |
| STO 3 | RCL 5 | 2 | GTO 1 | RCL 3 | × | − | ÷ | 3 |
| RTN | STO − 7 | × | √ | − | 2 | 2 | RCL 9 | ÷ |
| LBL D | RCL 3 | RCL 7 | STO 9 | √ | × | ÷ | CHS | cos |
| STO 4 | 4 | 9 | RCL 8 | STO 7 | RCL 6 | −x− | 2 | RCL 9 |
| RTN | × | × | STO + 9 | F0? | x⇄y | ↑ | ÷ | × |
| LBL E | RCL 2 | − | − | CHS | F0? | ↑ | 1 | 2 |
| STO 5 | $x^2$ | RCL 6 | GSB 2 | + | CHS | RCL 8 | CHS | × |
| RTN | − | × | RCL 9 | STO 9 | + | x⇄y | DSP 0 | GTO 6 |
| LBL a | × | 2 | GSB 2 | RCL 6 | STO 8 | ÷ | PAUSE | LBL 5 |
| RCL 1 | RCL 4 | 7 | − | RCL 2 | GSB 3 | −x− | DSP 9 | RCL 1 |
| STO ÷ 2 | $x^2$ | ÷ | LBL 6 | × | F0? | RTN | R↓ | STO × 2 |
| STO ÷ 3 | − | + | RCL 6 | RCL 4 | GTO 5 | LBL 2 | −x− | STO × 3 |
| STO ÷ 4 | 8 | 2 | − | − | SF 0 | x<0 | x⇄y | STO × 4 |
| STO ÷ 5 | ÷ | ÷ | CF 0 | RCL 2 | GTO 0 | SF 2 | −x− | STO × 5 |
| RCL 3 | STO 8 | STO 8 | STO 6 | $x^2$ | LBL 3 | ABS | RTN | R↓ |
| 2 | RCL 7 | $x^2$ | LBL 0 | RCL 6 | RCL 9 | 3 | LBL 1 | RTN |
| ÷ | RCL 6 | RCL 9 | RCL 2 | 8 | $x^2$ | 1/x | RCL 8 | |
| CHS | $x^2$ | 3 | 2 | × | RCL 8 | $y^x$ | RCL 9 | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 223 |

Parábola de mínimos cuadrados : $y = a + bx + cx^2$ ó $y = \mathrm{Exp}(a + bx + cx^2)$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | RCL 9 | RTN | RCL 1 | RCL A | RCL 1 | − | RTN | 0 |
| P⇄S | P⇄S | LBL D | − | − | × | RCL C | LBL 0 | RTN |
| CLREG | RTN | P⇄S | RCL D | RCL 0 | + | x=0 | CHS | LBL E |
| P⇄S | LBL C | RCL 4 | RCL 4 | CHS | RCL E | GTO 1 | √ | ↑ |
| RTN | F0? | RCL 9 | × | ÷ | RCL 6 | ÷ | 1 | ↑ |
| LBL B | LN | ÷ | RCL 5 | STO B | × | RCL B | CHS | ↑ |
| F0? | x⇄y | STO D | − | RCL D | − | CHS | PAUSE | RCL C |
| LN | Σ− | RCL 6 | STO 0 | × | RCL 7 | RCL C | R↓ | × |
| x⇄y | LASTX | × | × | CHS | RCL E | 2 | RCL E | RCL B |
| Σ+ | P⇄S | RCL 8 | − | RCL E | RCL 6 | × | -x- | + |
| LASTX | STO 0 | − | RCL 3 | + | × | ÷ | x⇄y | × |
| P⇄S | $x^2$ | STO A | RCL 5 | RCL C | − | STO E | RTN | RCL A |
| STO 0 | $x^2$ | RCL D | $x^2$ | RCL 5 | ÷ | $x^2$ | LBL 1 | + |
| $x^2$ | STO−3 | RCL 5 | RCL 9 | × | STO D | + | R↓ | F0? |
| $x^2$ | RCL 0 | × | ÷ | RCL 9 | RCL A | x<0 | RCL B | $e^x$ |
| STO+3 | x≠0 | RCL 2 | − | ÷ | RCL B | GTO 0 | ÷ | RTN |
| RCL 0 | ÷ | − | RCL 0 | − | RCL C | √ | RTN | |
| x≠0 | STO−2 | STO B | × | STO A | RCL D | RCL E | LBL d | |
| ÷ | RCL 0 | × | RCL B | RCL 6 | STK | x⇄y | F0? | |
| STO+2 | x≠0 | RCL 6 | $x^2$ | × | P⇄S | − | GTO 2 | |
| RCL 0 | ÷ | RCL 9 | + | RCL B | RTN | -x- | SF 0 | |
| x≠0 | × | ÷ | ÷ | RCL 8 | LBL e | LASTX | 1 | |
| ÷ | STO−1 | STO E | STO C | × | F0? | RCL E | RTN | |
| × | RCL 9 | RCL 5 | RCL B | + | LN | + | LBL 2 | |
| STO+1 | P⇄S | × | × | RCL C | RCL A | -x- | CF 0 | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 216 |

Polinomio cúbico de mín. cuadrados: $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBLA | RCLE | GSB1 | RCL3 | RCL5 | RCL0 | RCL3 | STOC | − |
| CLREG | 1 | STO-7 | RCLE | RCLE | ÷ | RCLB | RCL1 | RCLE |
| RTN | + | GSB1 | RCL2 | RCL2 | STOB | × | × | ÷ |
| LBLB | STOE | STO-8 | RCL0 | RCL2 | × | STO-6 | STO-3 | STOA |
| x⇄y | RTN | GSB1 | GSB0 | GSB0 | − | RCL5 | RCL2 | RCLB |
| STO+0 | LBL1 | STO-9 | RCL7 | RCL9 | STOA | RCLA | RCLD | RCLC |
| ↑ | LASTX | RCLE | RCLE | RCLE | RCL2 | RCL4 | × | RCLD |
| × | × | 1 | RCL6 | RCL6 | RCLB | ÷ | STO-3 | STK |
| STO+1 | RTN | − | RCL0 | RCL2 | × | STOB | RCL3 | RTN |
| GSB1 | LBLC | STOE | GSB0 | GSB0 | STO-7 | × | RCL0 | LBLE |
| STO+2 | x⇄y | RTN | RCL3 | GTO2 | RCL3 | STO-7 | ÷ | ↑ |
| GSB1 | STO-0 | LBLD | RCLE | LBL0 | RCLB | RCL6 | STOB | ↑ |
| STO+3 | ↑ | 1 | RCL1 | × | × | RCLB | P⇄S | ↑ |
| GSB1 | × | 0 | RCL1 | R↓ | STO-8 | × | RCL0 | RCLD |
| STO+4 | STO-1 | STI | GSB0 | × | RCL1 | STO-8 | × | × |
| GSB1 | GSB1 | RCLE | RCL4 | R↑ | RCL1 | RCL8 | RCL6 | RCLC |
| STO+5 | STO-2 | RCL1 | RCLE | − | RCL0 | RCL7 | x⇄y | + |
| x⇄y | GSB1 | RCL0 | RCL2 | STO(i) | ÷ | ÷ | − | × |
| STO+6 | STO-3 | RCL0 | RCL1 | ISZ | STOB | STOD | RCL1 | RCLB |
| GSB1 | GSB1 | GSB0 | GSB0 | RTN | × | RCL5 | RCLC | + |
| STO+7 | STO-4 | RCL2 | RCL8 | LBL2 | STO-4 | × | × | × |
| GSB1 | GSB1 | RCLE | RCLE | P⇄S | RCL2 | STO-6 | − | RCLA |
| STO+8 | STO-5 | RCL0 | RCL6 | RCL5 | RCLB | RCL6 | RCL2 | + |
| GSB1 | x⇄y | RCL1 | RCL1 | RCL1 | × | RCL4 | RCLD | RTN |
| STO+9 | STO-6 | GSB0 | GSB0 | RCL2 | STO-5 | ÷ | × | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 224 |

## Regresión lineal de 2 variables: $z = a + bx + cy$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | R↓ | × | ST I | ÷ | RCL 0 | STK |
| P⇄S | Σ− | RCL 2 | × | × | − | RCL E |
| CLREG | LASTX | − | − | RCL B | STO D | RTN |
| P⇄S | P⇄S | STO A | RCL I | RCL E | − | LBL E |
| RTN | R↑ | RCL 6 | RCL E | × | RCL 9 | RCL C |
| LBL B | STO−1 | RCL D | RCL 6 | + | 3 | × |
| R↓ | × | × | × | CHS | − | x⇄y |
| Σ+ | STO−2 | RCL 8 | − | RCL 1 | ÷ | RCL B |
| LASTX | x⇄y | − | RCL D | RCL 9 | √ | × |
| P⇄S | LASTX | STO C | × | ÷ | STO E | + |
| R↑ | × | × | RCL C | STO D | LASTX | RCL A |
| STO+1 | STO−3 | RCL D | $x^2$ | + | RCL D | + |
| × | LASTX | RCL 4 | + | RCL A | ÷ | RTN |
| STO+2 | $x^2$ | × | ÷ | x⇄y | RCL 9 | |
| x⇄y | STO−0 | RCL 5 | STO B | STO A | 1 | |
| LASTX | RCL 9 | − | RCL C | x⇄y | − | |
| × | P⇄S | STO D | × | RCL C | × | |
| STO+3 | RTN | RCL 6 | RCL A | × | 1 | |
| LASTX | LBL D | RCL 9 | − | RCI | + | |
| $x^2$ | P⇄S | ÷ | RCL D | RCL B | STO D | |
| STO+0 | RCL 4 | STO E | ÷ | × | P⇄S | |
| RCL 9 | RCL 9 | RCL 1 | CHS | + | RCL A | |
| P⇄S | ÷ | × | STO C | RCL D | RCL B | |
| RTN | STO D | RCL 3 | RCL 4 | RCL 1 | RCL C | |
| LBL C | RCL 1 | − | RCL 9 | × | RCL D | |
| | | | | | STK | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | RCL E<br>150 | 163 |

Cambios de base

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL a | INT | 1 | x>y | ST I | LASTX | RC I |
| RCL B | 1 | STO − 3 | RTN | R↓ | FRAC | $y^x$ |
| GTO 0 | + | SF 1 | ÷ | • | RCL 1 | × |
| LBL A | $10^x$ | LBL 4 | GTO 1 | 5 | × | STO + 3 |
| RCL A | STO 4 | DSZ | LBL D | − | RCL 4 | 9 |
| LBL 0 | LBL 2 | RCL 5 | ABS | LOG | RC I | RC I |
| STO 1 | RCL 0 | RCL 4 | INT | INT | $y^x$ | CHS |
| R↓ | GSB 1 | × | STO A | 1 | × | x≤y |
| SF 1 | R↓ | x=0 | R↓ | + | ISZ | GTO 9 |
| 0 | INT | CF 1 | RTN | $10^x$ | STO + 3 | LBL 6 |
| STO 3 | LASTX | FRAC | LBL E | STO 4 | GTO 7 | RCL 3 |
| ST I | FRAC | STO 5 | ABS | R↓ | LBL 6 | RTN |
| R↓ | RCL 4 | LASTX | INT | FRAC | ST I | LBL C |
| FRAC | × | INT | STO B | STO 5 | LBL 9 | GSB A |
| STO 5 | STO 0 | RCL 1 | R↓ | LASTX | DSZ | GSB b |
| LASTX | x=0 | RC I | RTN | INT | RCL 5 | RTN |
| INT | CF 1 | $y^x$ | LBL b | STO 2 | x=0 | LBL c |
| 1 | R↓ | × | RCL B | LBL 7 | GTO 6 | GSB a |
| + | STO + 3 | STO + 3 | GTO 6 | RCL 2 | RCL 1 | GSB B |
| STO 0 | RCL 1 | F1? | LBL B | RCL 1 | × | RTN |
| RCL I | STO × 3 | GTO 4 | RCL A | ÷ | FRAC | |
| • | F1? | RCL 3 | LBL 6 | x=0 | STO 5 | |
| 5 | GTO 2 | RTN | STO 1 | GTO 6 | LASTX | |
| − | RCL 1 | LBL 1 | 0 | INT | INT | |
| LOG | STO ÷ 3 | RCL 4 | STO 3 | STO 2 | RCL 4 | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 170 |

Ejemplo de problemas de contorno : $y'' = xy$ , $y(0) = 0$ , $y(1) = 1$

a) solución numérica

- nos conformaremos con poder determinar 5 decimales exactos de la solución en $0 \le x \le 1$.
- para ello, determinamos el valor de $h$ que lo garantiza

~ Para ello, con $h = 0.1$, determinamos $y(1)$, partiendo de $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Resulta la tabla

| $h$ | 0.1 | 0.05 | 0.025 |
|---|---|---|---|
| $y(1)$ | 1.08533 920 | 1.08533 962 | 1.08533 965 |
| $y'(1)$ | 1.34744 539 | 1.34744 459 | 1.34744 454 |

de lo cual se deduce que $h = 0.1$ dará resultados con al menos 5 decimales.

- ahora, hacemos estimativos de $y'(0)$, partiendo de $y'(0) = 1$. Obtenemos :

$y'(0) = 1 \Rightarrow y(1) = 1.085339$ , cogemos arbitrariamente $y'(0)$ en 0,05

$y'(0) = 0.95 \Rightarrow y(1) = 1.031072$ ,

corrección $\Rightarrow$ $y'(0)_N = 0.95 + (1 - 1{,}031072) \cdot \dfrac{(1 - 0.95)(\cdot}{1.085339 - 1.031072} = 0.921371$

$y'(0) = 0.921371 \Rightarrow y(1) = 1.000000$

y puesto que sólo llevamos 5 decimales, hemos acabado , y la solución es :

| $x$ | $y$ | $y'$ | $x$ | $y$ | $y'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0.921371 | 0.6 | 0.562825 | 0.988309 |
| 0.1 | 0.092145 | 0.921678 | 0.7 | 0.663546 | 1.028229 |
| 0.2 | 0.184397 | 0.923829 | 0.8 | 0.768932 | 1.082001 |
| 0.3 | 0.277034 | 0.929673 | 0.9 | 0.880491 | 1.152145 |
| 0.4 | 0.370517 | 0.941080 | 1.0 | 1.000000 | 1.241497 |
| 0.5 | 0.465499 | 0.959962 | | | |

b) ajustes en $0 \le x \le 1$. Errores relativos máximos. Id absolutos ( referidos a estos puntos, no a la $y$ continua )

- parábola min. cuad $\equiv y = 0.137988x^2 + 0.850405x + 0.005173$ , $E_{MAX} \simeq 0.006434$
- cúbico min. cuad $\equiv y = 0.160852x^3 - 0.103290x^2 + 0.942412x - 0.000617$, $E_{MAX} \simeq 0.000659$
- colocac. 0-0,2-0,5-0,8-1 $\equiv y = 0.087143x^4 - 0.013192x^3 + 0.005292x^2 + 0.920757x$ , $E_{MAX} \simeq 0.000034$
- cuártico mini-max $\equiv y =$
- colocac. 0-0,2-0,4-0,6-0,8-1 $\equiv y = 0.010547x^5 + 0.060833x^4 + 0.009474x^3 - 0.002446x^2 + 0.921592x$, $E_{MAX} \simeq 0.000007$
- cuártico ceros de $T_5(x) \equiv y = 0.086948x^4 - 0.013098x^3 + 0.005467x^2 + 0.920639x + 0.000015$ , $E_{MAX} \simeq 0.000028$
- cúbico mini-max $\equiv y = 0.161503x^3 - 0.104251x^2 + 0.942748x - 0.000637$ , $E_{MAX} \simeq 0.000637$

## c ) solución analítica

- Emplearemos un método de serie de Taylor.

- La ecuación es $y'' = xy$ , $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(0) = a$

  el desarrollo es $y = y(0) + \frac{x}{1!} y'(0) + \frac{x^2}{2!} y''(0) + \frac{x^3}{3!} y'''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} y^{n)}(0) + \cdots$

  y necesitamos los valores de las derivadas:

- estos son: $x = 0,$

$$\left\{\begin{array}{ll} y(0) = 0 & , \; y^{V)}(0) = 3y'' + xy''' = 0 \\ y'(0) = a & , \; y^{VI)}(0) = 4y''' + xy^{IV} = 0 \\ y''(0) = xy = 0 & , \; y^{7)}(0) = 5y^{IV} + xy^{V} = 10a \\ y'''(0) = y + xy' = 0 & , \; \cdots \qquad \cdots \\ y^{IV)}(0) = 2y' + xy'' = 2a & , \; y^{n)}(0) = (n-2)\, y^{n-3)} + x \cdot y^{n-2)} \end{array}\right.$$

- y resulta el desarrollo

$$y(x) = ax + \frac{a}{12} x^4 + \frac{a}{504} x^7 + \frac{a}{45360} x^{10} + \cdots$$

- igualando $y(1) = 1$, resulta

$$1 = a + \frac{a}{12} + \frac{a}{504} + \cdots$$

- de donde obtenemos $a$

$$a = 1 / \left( 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{504} + \cdots \right) = \underline{0.921370561} = y'(0)$$

- el valor de $a$ exacto viene dado por

$$a = 1 / \left( 1 + \frac{2}{4!} + \frac{2.5}{7!} + \frac{2.5.8}{10!} + \frac{2.5.8.11}{13!} + \frac{2.5.8.11.14}{16!} + \cdots \right)$$

y con $y(0) = 0$, $y'(0) = 0.921370561$, $h = 0.02$, se obtiene

| x | y | y' | x | y | y' |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.09214 4734 | 0.92167 7697 | 0.6 | 0.56282 4437 | 0.98830 8340 |
| 0.2 | 0.18439 6985 | 0.92382 8368 | 0.7 | 0.66354 5610 | 1.02822 7681 |
| 0.3 | 0.27703 3493 | 0.92967 2229 | 0.8 | 0.76843 1469 | 1.08199 9791 |
| 0.4 | 0.37051 6812 | 0.94107 8935 | 0.9 | 0.88049 0938 | 1.15214 3533 |
| 0.5 | 0.46549 8387 | 0.95996 1348 | 1.0 | 1.00000 0000 | 1.24149 5721 |

$y(x) = 0.921370561\,x + 0.076780880\,x^4 + 0.001828116\,x^7 + 0.000020312\,x^{10} + \cdots$ , $E_{MAX} \simeq 1.10^{-7}$

## Problemas de contorno $\quad y'' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0, \; y(1) = 1$

- utilizamos otro procedimiento: - en vez de hallar las derivadas, se utilizan coeficientes indeterminados

- suponemos la solución de la forma $y = a_0 x + a_1 x^4 + a_2 x^7 + a_3 x^{10} + a_4 x^{13} + \cdots$

- de aquí, $y'' = 12 a_1 x^2 + 42 a_2 x^5 + 90 a_3 x^8 + 156 a_4 x^{11} + 240 a_5 x^{14} + 342 a_6 x^{17} + \cdots$

- y por otra parte, $y^2 = a_0^2 x^2 + x^5 (2a_0 a_1) + x^8 (2a_0 a_2 + a_1^2) + x^{11} (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2) +$
$+ x^{14} (2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2) + x^{17} (2a_0 a_5 + 2a_1 a_4 + 2a_2 a_3) + \cdots$

- igualando coeficientes, resulta

$x \equiv \quad a_0 = a$ , $\quad x^8 \equiv 2a_0 a_2 + a_1^2 = 90 a_3 \Rightarrow a_3 = \dfrac{15a^4 + 22a^2 + 7}{90720}$

$x^2 \equiv \quad 1 + a_0^2 = 12 a_1 \Rightarrow a_1 = \dfrac{1+a^2}{12}$ ,

$x^5 \equiv \quad 2a_0 a_1 = 42 a_2 \Rightarrow a_2 = \dfrac{a(1+a^2)}{252}$ , $\quad x^{11} \equiv \quad a_4 = \dfrac{a_0 a_3 + a_1 a_2}{78} = \dfrac{a}{7076160}(45a^4 + 82a^2 + 37)$

- y de aquí, el desarrollo es:

$$y(x) = ax + \frac{1+a^2}{12} x^4 + \frac{a(1+a^2)}{252} x^7 + \frac{15a^4 + 22a^2 + 7}{90720} x^{10} + \frac{45a^5 + 82a^3 + 37a}{7076160} x^{13} + \cdots$$

- donde $a$ se determina por la condición $y(1) = 1$. , es decir, resolviendo la ecuación en $a$:

$$1 = a + \frac{1+a^2}{12} + \frac{a(1+a^2)}{252} + \frac{15a^4 + 22a^2 + 7}{90720} + \frac{45a^5 + 82a^3 + 37a}{7076160} + \cdots$$

- tomaremos $n$ términos, para ver la convergencia de $a$ hacia su valor exacto:

| nº de términos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| valor de $a$ | 1 | 0.85565 4600 | 0.85056 1656 | 0.85026 8062 | 0.85025 5600 |

- tomando el valor de $y'(0) = a = 0{,}8502556$ (al menos 5 decimales exactos),
y resolviendo por Runge-Kutta con $h = 0{,}02$, se obtiene $y(1) \simeq 1{,}000\,000\,7$
que confirma el resultado

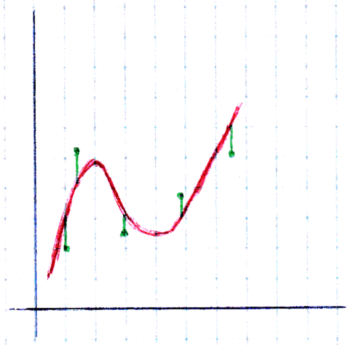
- el desarrollo para $y(x)$, $0 \leq x \leq 1$, el siguiente:

$$y(x) \simeq 0{,}8502556\,x + 0{,}14357788\,x^4 + 0{,}00581323\,x^7 + 0{,}00033889\,x^{10} + 0{,}00001439\,x^{13}$$

- que da un error inferior a $10^{-6}$ en $0 \leq x \leq 1$

# polinomio de 3er grado mini-max

- Buscamos un polinomio $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ que cumpla lo siguiente:



- dados cinco puntos $(x_0, y_0)$ $(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$ $(x_3, y_3)$ $(x_4, y_4)$, al no poder (en general) colocarse en los cinco, pase a traves de ellos, difiriendo en $+h, -h, \ldots$ alternativamente, es decir, para los valores de $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$, difiera de $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$ en una cantidad $h$ lo menor posible.

- Esto es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 &= y_0 + h \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 &= y_1 - h \\
a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 &= y_2 + h \\
a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 &= y_3 - h \\
a_0 + a_1 x_4 + a_2 x_4^2 + a_3 x_4^3 &= y_4 + h
\end{aligned}\right\} \quad 5 \text{ ec. con } 5 \text{ incog: } a_0, a_1, a_2, a_3, h.$$

la solución de éste sistema puede obtenerse así:

- sean

$$\begin{cases}
A = (x_0^2 - x_2^2)(x_1 - x_3) - (x_1^2 - x_3^2)(x_0 - x_2) \\
B = (x_0^3 - x_2^3)(x_1 - x_3) - (x_1^3 - x_3^3)(x_0 - x_2) \\
C = (y_0 - y_2)(x_1 - x_3) - (y_1 - y_3)(x_0 - x_2) \\
D = (x_0^2 - x_2^2)(x_2 - x_4) - (x_2^2 - x_4^2)(x_0 - x_2) \\
E = (x_0^3 - x_2^3)(x_2 - x_4) - (x_2^3 - x_4^3)(x_0 - x_2) \\
F = (y_0 - y_2)(x_2 - x_4) - (y_2 - y_4)(x_0 - x_2)
\end{cases}$$

- entonces,

$$\begin{cases}
a_3 = (AF - CD)/(AE - BD) \\
a_2 = (C - Ba_3)/A \\
a_1 = \dfrac{(y_0 - y_2) - a_3(x_0^3 - x_2^3) - a_2(x_0^2 - x_2^2)}{x_0 - x_2} \\
a_0 = \dfrac{(y_0 + y_1) - a_3(x_0^3 + x_1^3) - a_2(x_0^2 + x_1^2) - a_1(x_0 + x_1)}{2} \\
h = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 - y_0
\end{cases}$$

- y se tiene el polinomio $\underline{y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3}$

**Ejemplos**: se desea una aproximación cúbica para $y = \operatorname{sen} x$ en $0 \le x \le 1$, tal que en ese intervalo se comporte lo más adecuadamente posible respecto de $y$.

- veremos aproximaciones diversas y sus errores:

~ **Taylor**: $y = \operatorname{sen} x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = -1 \end{array}\right\}$ $y = x - \dfrac{x^3}{6}$, error max, $|E_{MAX}| \simeq 0{,}008$

- desarrollando en $x = 0.5$

$$\left.\begin{array}{l} y(0.5) = \operatorname{sen} 0.5 \\ y'(0.5) = \cos 0.5 \\ y''(0.5) = -\operatorname{sen} 0.5 \\ y'''(0.5) = -\cos 0.5 \end{array}\right\} \operatorname{sen} x \simeq -0.146264x^3 - 0.020317x^2 + 1.007598x - 0.001010$$

$|E_{MAX}| = 0{,}0015$

~ **Mínimos cuadrados**

- ajustando un cúbico de mínimos cuadrados a $(x, \operatorname{sen} x)$ para $x = 0\,(0.05)\,1$, resulta:

$\operatorname{sen} x \simeq -0.144073x^3 - 0.018465x^2 + 1.004476x - 0.000188$, $|E_{MAX}| = 0.000221$

~ **Colocación**

- en diferentes puntos

$(0, 1/3, 2/3, 1) \equiv \operatorname{sen} x \simeq -0{,}144245x^3 - 0.017844x^2 + 1.003559x$, $|E_{MAX}| \simeq 0.00028$

$(0, 0.1, 0.9, 1) \equiv \operatorname{sen} x \simeq -0{,}143288x^3 - 0.016676x^2 + 1{,}001435x$, $|E_{MAX}| \simeq 0.00079$

$(0, 0.49, 0.51, 1) \equiv \operatorname{sen} x \simeq -0.144446x^3 - 0.018090x^2 + 1.004006x$, $|E_{MAX}| \simeq 0.00035$

ceros de $T_4(x) \equiv \operatorname{sen} x \simeq -0.144445x^3 - 0.018088x^2 + 1.003947x - 0.000125$, $|E_{MAX}| \simeq 0{,}00018$

~ **Mini - max**

cuádrupla inicial $(0 - 0{,}25 - 0{,}50 - 0{,}75 - 1) \equiv \operatorname{sen} x \simeq -0{,}14399x^3 - 0{,}01877x^2 + 1{,}00423x - 0{,}00012$, $h = 0.00012$

tiene error máximo $|E_M| = 0{,}000213$ en $x = 0.86$

2ª cuádrupla $(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0.86, 1) \equiv \operatorname{sen} x \simeq -0.142916x^3 - 0.020387x^2 + 1.004773x - 0.000141$, $h = 0.00014$

$|E_M| = 0.000197$ en $x = 0.16$

3ª cuádrupla $(0, 0.16, \frac{1}{2}, 0.86, 1) \equiv \operatorname{sen} x \simeq -0.1435546x^3 - 0.019442x^2 + 1.004458x - 0.000155$, $h = 0.000155$

$|E_M| = 0.00015726$ en $x = 0.522$

4ª cuádrupla $(0 - 0.16 - 0.522 - 0.86 - 1) \equiv \operatorname{sen} x \simeq -0.1435473x^3 - 0.01944935x^2 + 1.00446764x - 0.00015537$

con $|h| = 0.00015537$, y $|E_M| = 0.000155496$ en $x = 0.8638$.

Puesto que $|E_M| \simeq 1.00081\,|h|$, damos por terminada la iteración.

$\operatorname{sen} x \simeq -0.1435473x^3 - 0.01944935x^2 + 1.00446764x - 0.00015537$, $|E_{MAX}| = 0.000155$

# Ajedrez

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | LBL 8 | CHS | P⇄S | P⇄S | 6 | P⇄S | GTO 5 | RCL D |
| DSP 1 | GSB 2 | GSB 2 | RCL 1 | RCL 5 | 6 | GTO 9 | RCL B | ÷ |
| 0 | RCL 5 | 5 | P⇄S | P⇄S | X≠Y | LBL 0 | GTO 9 | + |
| STI | LBL 9 | 6 | GTO 8 | GTO 3 | GTO 0 | P⇄S | LBL 0 | F2? |
| RCL 0 | CHS | X≠Y | LBL 0 | LBL 0 | P⇄S | RCL 8 | RCL B | CHS |
| GSB 2 | DSP 9 | GTO 5 | P⇄S | GSB 6 | RCL 6 | P⇄S | CHS | R/S |
| RCL 1 | ISZ | RCL 8 | RCL 2 | X≠Y | P⇄S | GTO 8 | LBL 3 | RTN |
| GSB 7 | RCI | GTO 9 | P⇄S | GTO 4 | GSB 2 | LBL B | GSB 2 | |
| INT | EEX | LBL 0 | GTO 8 | RCL 9 | LBL 5 | RCL A | RCL 2 | |
| 6 | 7 | GSB 6 | LBL D | GSB 2 | RCL 7 | GSB 2 | GTO 9 | |
| X=Y | ÷ | X≠Y | P⇄S | 2 | GTO 9 | 6 | LBL 6 | |
| GTO C | − | GTO 0 | RCL 3 | 8 | LBL 0 | 8 | RCL D | |
| RCL 2 | RTN | P⇄S | P⇄S | X≠Y | GSB 6 | X≠Y | + | |
| GSB 7 | LBL 0 | RCL 0 | GSB 2 | GTO 4 | X≠Y | GTO 0 | RTN | |
| FRAC | GSB 6 | P⇄S | 1 | RCL 2 | GTO 0 | RCL B | LBL 7 | |
| RCL E | X≠Y | GSB 2 | 8 | GTO 9 | P⇄S | GTO 3 | GSB 2 | |
| X=Y | GTO 0 | LBL 4 | X≠Y | LBL C | RCL 7 | LBL 0 | RCL D | |
| GTO D | RCL 6 | RCL 4 | GTO 0 | RCL 4 | P⇄S | GSB 6 | ÷ | |
| RCL 3 | GSB 2 | GTO 9 | RCL 9 | GSB 7 | GTO 8 | X≠Y | RTN | |
| GSB 2 | GTO 5 | LBL 0 | CHS | FRAC | LBL 0 | GTO 0 | LBL 2 | |
| 2 | LBL 0 | R↓ | GTO 3 | RCL E | R↓ | RCL C | X<0 | |
| 6 | GSB 6 | 1 | LBL 0 | X=Y | X>0 | GSB 2 | SF 2 | |
| X≠Y | X≠Y | 5 | GSB 6 | GTO B | GTO 0 | 6 | ABS | |
| GTO 0 | GTO 0 | X≠Y | X≠Y | RCL 3 | P⇄S | 8 | ISZ | |
| RCL 4 | RCL 6 | GTO 0 | GTO 0 | GSB 2 | RCL 9 | X=Y | RCI | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 207 |

registros

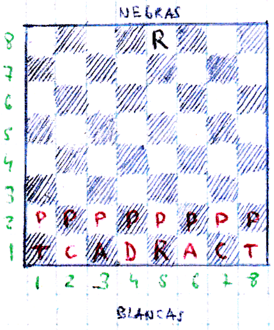
| | | | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 146 | P4R |
| | 1 | 542 | D4C |
| | 2 | 572 | D7C |
| | 3 | 145 | P4D |
| | 4 | 575 | D7D |
| | 5 | 552 | D5C |
| | 6 | 3436 | A4AR |
| | 7 | 573 | D7A |
| | 8 | 155 | P5D |
| | 9 | 363 | A6A |
| sec | 0 | 3535 | A5AD |
| sec | 1 | 5725 | D7CD |
| sec | 2 | 556 | D5R |
| sec | 3 | 352 | A5C |
| sec | 4 | 0 | – |
| sec | 5 | 364 | A6T |
| sec | 6 | 3435 | A4AD |
| sec | 7 | 576 | D7R |
| sec | 8 | 5726 | D7CR |
| sec | 9 | 335 | A3D |
| | A | 1325 | P3CD |
| | B | 322 | A2C |
| | C | 343 | A4A |
| | D | 10 | – |
| | E | 0.8 | – |
| | I | contador del nº de jugadas | |

ASEDREZ

START

DATOS PARA EL PROGRAMA "ASEDREZ"

## Explicación




### Objetivo

- las 16 piezas blancas son conducidas por la calculadora, y el rey negro por el jugador.

El objetivo de las blancas es, partiendo de la posición inicial, dar mate al rey negro en un máximo de 6 jugadas.

- Por tanto se considera que el jugador gana cuando las blancas no consiguen dar el mate en esas 6 jugadas, o bien si resulta ahogado. En otro caso, gana la calculadora (por supuesto, también gana dando mate en menos de 6 jugadas)

BLANCAS =

| | | |
|---|---|---|
| rey | R | 6 |
| dama | D | 5 |
| torre | T | 4 |
| alfil | A | 3 |
| caballo | C | 2 |
| peón | P | 1 |

- la representación de las jugadas se realiza mediante la siguiente clave:

Ejemplos:

D7C ≡ 572 , 5725 ≡ D7CD

A4AD ≡ 3435 , 552 ≡ D5C

P4R ≡ 146 ,

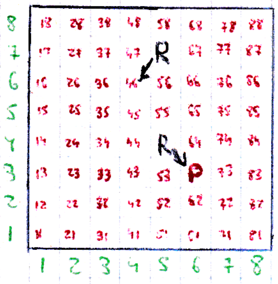
P3CD ≡ 1325 , etc,

- así la calculadora indica 1. P4R como: 146.1 — nº de jugadas efectuadas.

- los jaques se indican con el signo (−): 2. A4AR jaque ≡ −3436.2

- el jaque mate, con signo (−) y DSP 9 : 5. D5C mate ≡ −552.000 000 5 — nº de jugadas efectuadas

NEGRAS =



- el movimiento del rey negro se introduce como el nº de la casilla a la cual va, según la notación xy de la figura.

Ejemplos : el mov. de la figura se introduce como 46 R/S

RSTD ≡ 14 , R2D ≡ 47

- una captura se indica con signo (−) : en la figura, RXP ≡ −63 R/S

Instrucciones

- comienzan moviendo blancas : A → 1ª jugada blancas.
- responden negras : xy R/S → 2ª " "
- etc, repitiendo el 2º paso hasta finalizar el juego
- en la m-sima jugada de las blancas, se pueden producir los siguientes display

HP
- display normal abc.m
  - a = pieza que se mueve
  - b = nº de la casilla a la cual mueve
  - c = columna de la casilla b ( c puede ser de dos cifras )
  - m = nº de jugadas efectuadas
- display jaque = − abc.m
- display j. mate = − abc.000 000 m

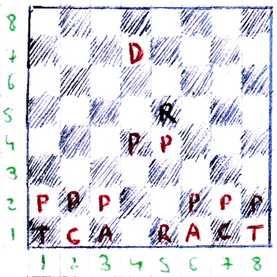
- el jugador introduce sus jugadas como :

jugador
- jugada normal : xy R/S
  - x = coord. horizontal
  - y = " vertical
- captura : −xy R/S

Observaciones

- 207 pasos + tarjeta de datos con 24 registros cargados ( 22 jugadas + 2 datos constantes )
- no detecta movimientos ilícitos. Caso de hacerse, no juega lógicamente
- en ocasiones, puede no señalar el jaque en su jugada
- fácil cambio de claves sin alterar el programa. Corto tiempo de ejecución.

Ejemplo

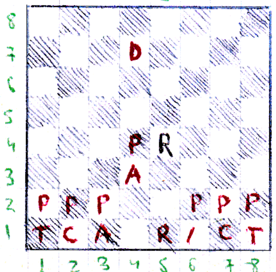


- introducir tarjeta de datos y tarjeta de programa (DSP1)
- mueven blancas : A → 146.1 ≡ 1. P4R , primera jugada blancas
- contestan negras : 57 R/S (R2R) → 542.2 ≡ 2. D4C , segunda "
- " " : 66 R/S (R3A) → 575.3 ≡ 3. D7D , tercera "
- " " : 55 R/S (R4R) → 145.4 ≡ 4. P4D (j), cuarta "

( ver 1er diagrama : posición después de 4. P4D jaque )

- contestan negras : −54 R/S (RXP) → −335.000 000 5 ≡ 5. A3D mate en la 5ª jugada.

- las blancas han dado el mate en cinco jugadas ≡ han ganado



← ( posición después de 5. A3D mate )

# Inversión de series de potencias : $y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_6 x^6$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL B | − | STO 4 | − | × | $y^x$ | RCL 2 | × | 0 |
| RCL 1 | RCL 0 | P⇄S | RCL 1 | RCL 1 | RCL 3 | −x− | RCL 2 | R/S |
| STO 0 | ÷ | RCL 2 | STO×0 | STO×0 | × | RCL 3 | + | |
| STO×0 | P⇄S | RCL 4 | STO×0 | STO×0 | 8 | −x− | × | |
| STO×0 | STO 3 | × | × | RCL 6 | 4 | RCL 4 | RCL 1 | |
| 1/x | P⇄S | 6 | RCL 2 | × | × | −x− | + | |
| P⇄S | RCL 1 | × | $x^2$ | − | + | RCL 5 | × | |
| STO 1 | RCL 3 | RCL 3 | $x^2$ | RCL 1 | RCL 1 | −x− | RTN | |
| P⇄S | × | $x^2$ | 1 | × | × | RCL 6 | LBL E | |
| RCL 2 | RCL 2 | 3 | 4 | RCL 3 | RCL 2 | P⇄S | P⇄S | |
| CHS | $x^2$ | × | × | $x^2$ | 5 | RTN | GSB D | |
| RCL 0 | − | + | + | RCL 2 | $y^x$ | LBL D | P⇄S | |
| ÷ | RCL 2 | RCL 1 | RCL 0 | RCL 4 | 4 | ↑ | RTN | |
| P⇄S | × | RCL 5 | ÷ | × | 2 | ↑ | LBL A | |
| STO 2 | 5 | × | P⇄S | + | × | ↑ | STO 1 | |
| P⇄S | × | − | STO 5 | RCL 2 | − | RCL 6 | R/S | |
| RCL 2 | RCL 1 | RCL 1 | P⇄S | × | RCL 0 | × | STO 2 | |
| $x^2$ | $x^2$ | × | RCL 2 | 2 | ÷ | RCL 5 | R/S | |
| 2 | STO×0 | RCL 2 | RCL 5 | 8 | P⇄S | + | STO 3 | |
| × | RCL 4 | $x^2$ | × | × | STO 6 | × | R/S | |
| RCL 1 | × | RCL 3 | RCL 3 | − | P⇄S | RCL 4 | STO 4 | |
| STO×0 | − | × | RCL 4 | RCL 1 | LBL C | + | R/S | |
| STO×0 | RCL 0 | 2 | × | × | P⇄S | × | STO 5 | |
| RCL 3 | ÷ | 1 | + | RCL 2 | RCL 1 | RCL 3 | R/S | |
| × | P⇄S | × | 7 | 3 | −x− | + | STO 6 | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 202 |

características

- 202 pasos (22 libres)
- 13 memorias ($R_7 - R_9$, $R_A - R_I$, $R_{S0}$, $R_{S7} - R_{S9}$ libres)

- status
  - FIX 4, DEG
  - ocupa etiquetas A, B, C, D, E

- instrucciones
  - introducir $a_1, a_2, \ldots a_6$

    $a_1$ A → $a_1$
    $a_2$ R/S → $a_2$
    ‐‐ ‐‐ ‐‐
    $a_6$ R/S → 0

    (si $a_i = 0$, se introduce como tal)

  - calcular $b_i$ ($b_1, b_2, \ldots b_6$)

    B → $b_1, b_2, \ldots b_6$ (10 seg)

  - opcional = presentar nuevamente $b_i$

    C → $b_1, b_2, \ldots b_6$

  - opcional = dada x, calcular y ó dada y calcular x

    x → D → y ó y E → x

| INVERSION DE SERIES = | | $y = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_6 x^6$<br>$x = b_1 y + b_2 y^2 + \cdots + b_6 y^6$ | | |
|---|---|---|---|---|
| ENT $a_i$ | →SAL $b_i$ | DSP $b_i$ | x→y | y→x |

Ejemplos =

~ 1) Dada la serie $y = 3(e^x - 1) \doteq 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{240}x^6$ , desarrollar $x = x(y)$.

3 A, $\frac{3}{2}$ R/S, $\frac{1}{2}$ R/S, $\frac{1}{8}$ R/S, $\frac{1}{40}$ R/S, $\frac{1}{240}$ R/S → 0

B → $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{18}$, $\frac{1}{81}$, $-\frac{1}{324}$, $\frac{1}{1215}$, $-\frac{1}{4374}$

es decir, $x = x(y) \simeq \frac{1}{3}y - \frac{1}{18}y^2 + \frac{1}{81}y^3 - \frac{1}{324}y^4 + \frac{1}{1215}y^5 - \frac{1}{4374}y^6 \simeq L[1 + \frac{y}{3}]$

para $x = 0{,}1$ , D → $y = 0{,}315512754$ , para $y = 0{,}315512754$ , E → $x = 0{,}099999981$

(el programa almacena $a_1, a_2 \ldots a_6$ en $R_1, R_2 \ldots R_6$ y $b_1, b_2 \ldots b_6$ en $R_{S1}, R_{S2} \ldots R_{S6}$)

~ 2) Hallar una aproximación para la raiz de $x^3 - 6x - 2 = 0$

- hacemos $x^3 - 6x = 2 = y$ , y desarrollamos x en potencias de y

  −6 A, 0 R/S, 1 R/S, 0 R/S, R/S, R/S → 0 , B → se obtiene (se ha puesto $z = y$)

  $x \simeq -0{,}1667\,z - 0{,}0008\,z^3 - 1{,}0717 \cdot 10^{-5} z^5$ ,

- y puesto que $x^3 - 6x = 2 = y$ , hallamos el valor de x para $y = 2$

  2 E → $x \simeq -0{,}33985$     (la raiz es $x \simeq 0{,}3398769$)

Newton - Sistemas $f(x,y)=0, \quad g(x,y)=0$

# El buscador, el tesoro, y el monstruo

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | x=y | ÷ | FRAC | RCL 3 | + | ÷ | RTN | RCL 2 |
| DSP 0 | GTO 2 | 2 | STO E | x=y | STO + i | INT | LBL 4 | 1 |
| CF 0 | R↓ | − | 1 | GTO 5 | RCL 1 | STO 8 | RCL 7 | 8 |
| GSB 0 | STO 1 | INT | 0 | RCL 0 | RCL 2 | DSZ | 9 | − |
| STO 3 | RCL 2 | x=0 | STO 7 | RCL 2 | x=y | RCL (i) | ÷ | GSB a |
| GSB 8 | RTN | GTO 9 | $x^2$ | x=y | GTO 7 | RCL 7 | LBL 5 | GSB a |
| STO 0 | LBL 8 | RCL (i) | × | GTO 4 | LBL C | ÷ | DSP 9 | LBL a |
| GSB 8 | RCL 3 | + | INT | RCL 4 | DSP 0 | INT | −x− | 7 |
| STO 4 | RCL 7 | x<0 | RTN | x=y | 2 | STO 9 | RCL 3 | + |
| GSB 8 | ÷ | GTO 9 | LBL D | GTO 4 | GSB 3 | − | RCL 0 | GSB b |
| STO 5 | INT | 9 | F0? | RCL 2 | STO 6 | ISZ | RCL 4 | GSB b |
| LBL 1 | STO 8 | x≷y | RTN | RCL 5 | 3 | RCL (i) | RCL 5 | LBL b |
| GSB 0 | LASTX | x>y | SF 0 | x=y | GSB 3 | RCL 8 | −STK− | x=y |
| RCL 3 | FRAC | GTO 9 | RCL 1 | GTO 4 | RCL 7 | RCL 7 | RCL 1 | GTO d |
| x=y | RCL 7 | STO (i) | x≷y | 2 | $x^2$ | STO × 9 | RTN | 1 |
| GTO 1 | × | RCL 8 | x≠y | GSB 3 | ÷ | × | LBL E | + |
| R↓ | STO 9 | RCL 7 | RTN | R↓ | STO + 6 | − | RCL 0 | RTN |
| STO 2 | 8 | × | GSB 2 | 7 | LBL c | DSZ | GSB e | LBL d |
| LBL 2 | ST I | + | LBL B | LN | RCL 6 | RCL (i) | RCL 4 | 1 |
| GSB 0 | GSB 9 | RTN | 5 | P→R | DSP 2 | RCL 9 | GSB e | R/S |
| RCL 3 | ISZ | LBL 0 | 5 | INT | RTN | − | RCL 5 | |
| x=y | LBL 9 | RCL E | x=y | RCL 7 | LBL 3 | − | GSB e | |
| GTO 2 | GSB 0 | x=0 | CF 0 | × | ST I | x≷y | 0 | |
| R↓ | 2 | 1 | R↓ | x≷y | RCL (i) | R→P | RTN | |
| RCL 2 | 3 | →D | STO 2 | INT | RCL 7 | RND | LBL e | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 220 |

características

- 220 pasos
- 11 memorias
- R A, B, C, D, ■ libres

status

- FIX 2, DEG
- CF 0, 1, 2, 3
- libres LBL 6, LBL 7

instrucciones

- ver otra hoja

tiempos

START: de ~20 a ~50

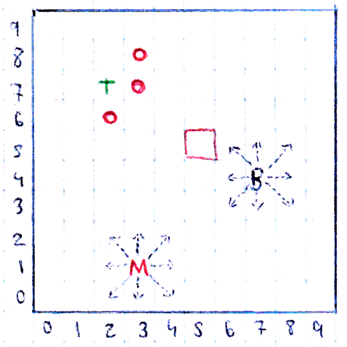
Mov: ~12 sg.

| EL BUSCADOR, EL TESORO Y EL MONSTRUO | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | LAST RADAR | | [seed I] |
| START: → $X Y_B$ | MOVIMIENTO | RADAR: → $d_M \cdot d_T$ | DISPARO | DETECTOR |

LAST RADAR: ~ 1 sg., RADAR: ~ 6 sg.

DISPARO: de ~1a ~13, DETECTOR: ~ 10 sg.

~ Explicación




a) – En una selva 10 x 10, escondido en alguna parte, se encuentra un tesoro T que es preciso encontrar, para lo cual basta con colocarse en el lugar donde está.

b) – Vd, como buscador B, es colocado al azar en alguna parte de la selva, y debe moverse a efectos de llegar hasta el tesoro, logrado lo cual habrá acabado el juego con su victoria, pero:

c) – también existe en algún lugar de la selva un monstruo, cuyo propósito es llegar hasta donde se encuentra el buscador para devorarlo, y si lo logra, el juego ha terminado. El monstruo camina siempre hacia el buscador, con movimiento de rey de ajedrez, es decir, una casilla en cualquier dirección.

~ Características

- el jugador debe moverse con mov. de rey de ajedrez, (es decir, una casilla en cualquier dirección), a efectos de llegar hasta el tesoro. La única información inicial que se le da al buscador es su propia posición en la selva, pero después de cada movimiento obtendrá información de la distancia que le separa del monstruo y del tesoro.

También dispone de los recursos siguientes:

a) RADAR: en cualquier momento dado, el buscador puede obtener una lectura de la distancia aproximada (redondeada) a que se encuentra tanto el monstruo como el tesoro.

b) DETECTOR: el tesoro dispone de la protección proporcionada por un máximo de 3 minas (y un mínimo de 1 sóla mina) situadas a una distancia máxima de 2 casillas en cualquier dirección a partir de él. Si el buscador se mueve a la casilla ocupada por una cualquiera de las minas, esta explotará, destrozándole, con lo cual termina el juego.

Para prevenir esto, el jugador posee un detector, que en cualquier momento le indicará la presencia de minas en cualquier casilla contigua a la que él ocupa.

c) DISPARO: el jugador (buscador) dispone de un arma con la cual puede disparar en cualquier momento sobre el monstruo. Si no le acierta, no sucede nada, pero si le da, el monstruo se desmaterializa y aparece en algún lugar al azar en la selva, continuando su movimiento hacia el buscador. El arma sólo puede efectuar un disparo, pero el buscador dispone de un refugio situado en la casilla 55; si se traslada a esta casilla, el arma queda recargada automáticamente.

Notas:

1) - inicialmente, T, M y B, así como las minas, son colocados al azar en la selva, de forma que T, M, B no puedan coincidir en el mismo sitio entre sí. Las minas están dentro de un cuadrado 5x5 con centro en T, y no pueden coincidir ninguna de ellas con T, pero sí entre sí. Igualmente es posible que al comienzo coincida alguna mina con M ó con B (no explotan en ese caso), ó entre sí, y es por esto que son 3 como máximo y 1 como mínimo. En el transcurso del juego, M puede coincidir con T, y no se ve afectado por las minas. Cualquiera, M, T, B o las minas, pueden caer inicialmente en la "casilla refugio" 55. En caso de que esté ocupada por una o varias minas, será imposible de utilizarla para recargar el arma.

2) - el detector de minas indica la presencia o no de minas dentro de un cuadrado 3x3 con centro en el buscador, pero no indica su situación ni su número.

3) - el monstruo sólo se mueve después que lo haga el buscador, o si le alcanza un disparo de este.

4) - por supuesto, el monstruo sabe donde está el buscador y camina siempre hacia él, pero este no ve al monstruo y la única información que dispone de él es la distancia a la que está en un momento dado.

5) - si el buscador logra llegar a la "casilla refugio" 55 (con lo cual recarga automáticamente el arma) y dispara desde esa propia casilla, el arma se recargará nuevamente si acierta al monstruo, y cada vez que dispare desde ella y acierte, volverá a recargarse.

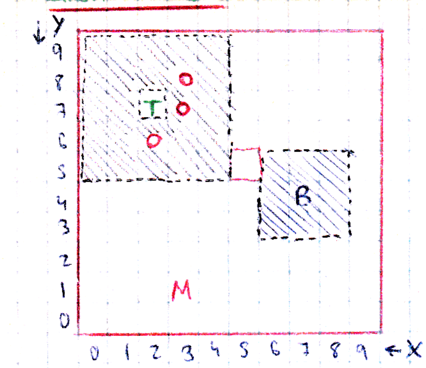
6) - el jugador (buscador) puede permanecer quieto, trasladándose a su propia casilla, pero el monstruo seguirá su movimiento hacia él.

7) - RADAR calcula y presenta las distancias actuales al monstruo y al tesoro } en cualquier momento.

8) - LAST RADAR sólo presenta las distancias a M y T últimamente calculadas }

ambos dan distancias sólo aproximadas, con error máximo $\pm \frac{1}{2}$ casilla

## ~ Instrucciones :




—— = casilla refugio
- - - - = area cubierta por el detector
- · - · - = " en la cual deben estar todas las minas

1)- introducir cara 1 y 2 de la tarjeta

- opcional : introducir seed ( cualquier nº ⩾ 0 ) ; seed STO E

2)- comenzar el juego

START : A → xy del buscador ( en DSP0 )

- opcional : lectura de radar

RADAR : C → distancia aprox al M • dist aprox. al T ( DSP2 )

- opcional : ver de nuevo la lectura del radar ( la ultima calculada )

LAST RADAR : f C → dist aprox al M • dist aprox al T ( DSP2 )

- opcional : ver si hay minas en las proximidades del buscador.

DETECTOR : E → 1.00 hay minas
→ 0.00 no hay minas.

- opcional : disparar contra el monstruo.

DISPARO : xy de la casilla en la que se supone esta el monstruo D → xy = disparo fallado ó arma descargada
→ $d_M \cdot d_T$ = disparo acertado , nuevas distancias

3) - movimiento del buscador.

MOVIM : xy de la casilla a la cual va , B → d M • d T = distancias como en RADAR

→ 1.111 111 111 → xy T → xy MINA 1 → xy MINA 2 → xy MINA 3 → xy M
= ha pisado una mina , juego terminado.

( en caso de ser devorado → Error , se puede revisar la sit. del tesoro, las minas y el monstruo ; CLx, GSB 4 )

→ xy.000 000 00 → xy T → xy MINA 1 → xy MINA 2 → XY MINA 3 → XY M
= ha encontrado el tesoro , juego terminado

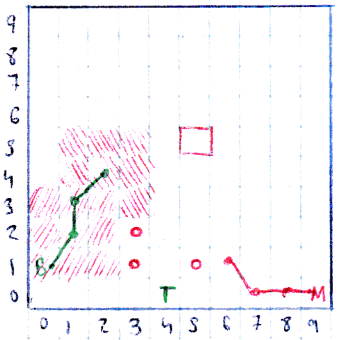
→ Error = el monstruo le ha devorado , juego terminado.

4) - para MOV, RADAR, DISPARO , DETECTOR, LAST RADAR, ir al paso adecuado

5) - para otro juego , ir al paso 2

## ~ Ejemplo

: se dibujara tambien la trayectoria que sigue el monstruo , para comparación, pero en el juego , no es visible




( aparece visualizada la trayectoria de M , asi como T y las minas, pero todo ello es invisible durante el juego, y solo se da aqui para facilidad de comprension. El buscador juega sin conocer nada de esto, basandose en deducciones )

1) introducimos una seed inicial y comenzamos el juego.

0.3562 STO E , A → 1

- el buscador esta en 01 inicialmente. Tomamos una lectura de radar C → 9.07

esto nos indica que no hay peligro de momento , sin peligro de minas ni M cerca.

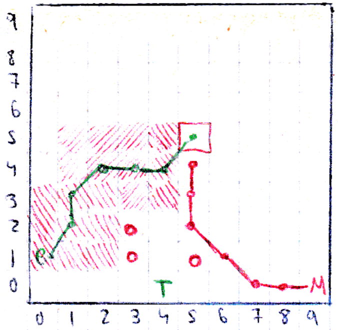
- nos vamos hacia el centro , 12 B → 7.04

no nos dice nada , el T puede estar hacia arriba o hacia abajo , asi que seguimos hacia arriba , previo chequeo de la zona actual a ver si está minada

E → 0.00 , nada , se resmina con ▨ , 13 B → 7.04

esto es raro , no parece que T este por arriba , iremos hacia el centro

24 B → 5.04 , E → 0.00 no hay minas



- decididamente, el tesoro parece estar por abajo, hacia 40 ó 41 ó 50 ó 51 a juzgar por los círculos y las distancias. El monstruo se acerca, pero no muy rápido, debe estar cerca del tesoro. Cambiamos de táctica

34 B → 3.04 , E → 0.00 , no hay minas.

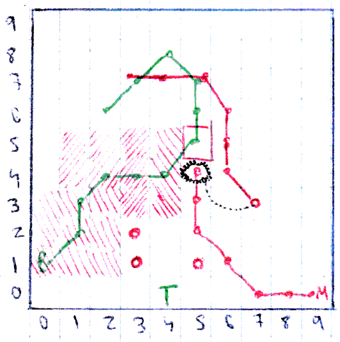
esto nos dice que el tesoro está decididamente en 40 ó 51, y M muy cerca. vamos hacia 51, pero sin alejarnos por ahora del centro, para poder recargar. = 44 B → 1.04

¡muy peligroso! el monstruo debe estar en 43, 53 ó 54. Disparamos = 54 D → 54 ¡fallo! M en 43 ó 53

53 D → 53 , no surte efecto, el arma está descargada. Huimos a la casilla refugio para recargar. Si el monstruo está por encima, nos capturará, y si no, se pondrá casi seguro en 54

55 B → 1.05 , le tenemos presumiblemente debajo. Disparamos 54 D → 1.05

¡acierto! se ha desvanecido de 54, ha aparecido en algún sitio no muy lejano, se ha movido, y está ahora a 1 de distancia, demasiado cerca. Aunque la pistola está cargada de nuevo, no conocemos en absoluto su posición. Es mejor huir para localizarle y disparar.



56 B → 1.06
57 B → 1.07 } está en 46 ó 66

probamos suerte hacia la izquierda.

48 B → 1.08

✳ = alcanzado por disparo

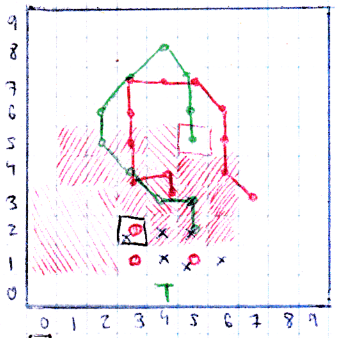
vamos a bajar. Si estaba en 46 nos capturara → 37 B → 1.07 ¡estaba casi seguro en 66!

lo malo es que, con seguridad, lo tenemos al lado, debe estar en 47. Dos alternativas, huir hacia 26, 27, 28 ó disparar. La 1ª

26 B → 1.06 , bajamos rápido por terreno conocido no minado.

25 B → 1.05 , 34 B → 1.04 , vamos hacia el 51, pero seguro M está encima.

43 B → 1.03 , puede haber minas E → 1.00 , es decir, posibilidad de minas



donde se indica (x). Al M lo hemos dejado atrás. Retroceder es ser capturados casi con certeza, así que avanzamos hacia 51 por el camino más seguro (no del todo)

53 B → 1.03 , ¡pfiu! , E → 0.00 , no minas, esto nos permite localizar (□) mina en 32. Bajamos por seguro = 52 B → 1.02 , E → 1.00 (x)

por ser $d_T \geq 2$, T no puede estar en 51, está en 40, pero no sabemos por donde pasar, debido a que puede haber 2 minas en 41, 51, 61, y no es posible retroceder. Rodeamos = 62 B → 1.03 , E → 1.00

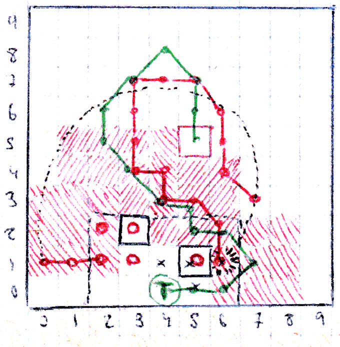
□ = mina localizada

no puede haber minas fuera de --- , luego sólo puede haber la mina de antes, en 51 ó 61 → 71 B → 1.03 , E → 0.00 , esto elimina 61 y nos permite localizar otra mina en 51. Intentamos ir a 40 por terreno seguro: 60 B → 1.02 , E → 1.00

esto es una situación límite = no sabemos si existe una mina en 50, y además es seguro que el monstruo nos ha acorralado contra el borde, es imposible escapar, está encima. Como la pistola está cargada, disparamos = 61 D → 5.02

¡¡tocado!! se ha rematerializado muy lejos. El todo por el todo: 50 B → 3.01

¡¡no había mina!!, El tesoro es nuestro,



40 B → "40.000 000 00" , el tesoro

↓

| | |
|---|---|
| 40.000 000 00 | , el tesoro |
| 31.000 000 00 | , mina 1 |
| 51.000 00000 | , mina 2 |
| 32.000 00000 | , mina 3 |
| 21.000 00000 | , el monstruo |

} ¡¡Se ha ganado el juego!!

# Análisis de funciones: raíces, graficación, etc.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL e | DSP 7 | RTN | ST I | RCL 0 | RCL S | RCL 6 |
| 1 | RND | LBL B | ÷ | 5 | GSB A | STO − 6 |
| 1 | $x \neq 0$ | STO 0 | STO 7 | 1/x | STO + 4 | R↓ |
| GTO 0 | GTO 2 | 8 | RCL 8 | √ | RCL 4 | LBL 5 |
| LBL E | LBL 3 | EEX | STO − 8 | STO 3 | 1 | ↑ |
| 1 | RCL 6 | CHS | LBL 6 | × | 2 | ↑ |
| 0 | RTN | 4 | RCL 6 | + | ÷ | 1 |
| LBL 0 | LBL C | STO i | RCL 6 | 2 | RCL 0 | + |
| ST I | STO 3 | STO + i | RCL 7 | ÷ | × | GSB D |
| R↓ | 4 | STO − 0 | STO + 6 | GSB A | RTN | STO + 6 |
| STO 6 | EEX | + | + | STO 4 | LBL a | DSP 4 |
| LBL 2 | CHS | GSB A | GSB D | RCL i | STO D | PSE |
| RCL 6 | 3 | STO 2 | STO + 8 | RCL 0 | R↓ | RND |
| PSE | STO 4 | RCL 0 | DSZ | RCL 3 | LBL 1 | $x = 0$ |
| GSB (i) | STO + 4 | GSB A | GTO 6 | × | RCL D | GTO 3 |
| $x = 0$ | STO − 3 | STO − 2 | RCL 8 | − | + | RCL S |
| GTO 3 | + | RCL 2 | RTN | 2 | STO E | GTO 5 |
| STO 7 | GSB B | RCL i | LBL D | ÷ | GSB A | LBL b |
| RCL 6 | STO 5 | ÷ | STO 5 | GSB A | RCL E | STO C |
| ISZ | RCL 3 | RTN | STO 0 | STO + 4 | PSE | RTN |
| GSB (i) | GSB B | LBL d | $x \gtrless y$ | 5 | $x \gtrless y$ | LBL A |
| DSZ | STO − 5 | $x \gtrless y$ | STO 2 | STO × 4 | PSE | RTN |
| STO ÷ 7 | RCL S | STO 6 | STO − 0 | RCL 2 | $x \gtrless y$ | |
| RCL 7 | RCL 4 | − | + | GSB A | GTO 1 | |
| STO − 6 | ÷ | RCL C | STO 1 | STO + 4 | LBL c | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 172 |

DERIVADAS: INTEGRALES, RAICES, GRAFICACION DE $y(x)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_0 \uparrow \Delta \to y_1, y_m$ | m de interv. | $a \to \int_a^\infty y(x)$ | INT con m int. | |
| $x \to y(x)$ | $x \to y'(x)$ | $x \to y''(x)$ | $a \uparrow b \to \int_a^b y(x)$ | $x_0 \to$ MAX<br>$x_0 \to$ RAIZ |

Características

- 172 pasos (52 libres)
- deja $R_9, R_A, R_B, R_{S0} - R_{S9}$ libres

Status

- FIX 7, RAD
- libres etiquetas 4, 7, 8, 9

Utilización

- para graficación, $x_0 \uparrow \Delta$, f A

  $x_0 \uparrow \Delta \to y_1, y_2, \ldots$ (presenta $x_i$ también)

- para evaluación de $y(x)$

  $x \to A \to y(x)$

  donde $y(x)$ se supone definida en LBL A, y finalizada con RTN

- para evaluación de $y'(x)$

  $x$ B → $y'(x)$

- para evaluación de $y''(x)$ (se supone $y(x)$ definida en LBL A)

  $x$ C → $y''(x)$

- para evaluar la integral $\int_a^b y(x)$

  $a \uparrow b$ D → $\int_a^b y(x)$

- para evaluar la integral $\int_a^b$ con m intervalos:

  m f B → m, $a \uparrow b$ f D → $\int_a^b y(x)$

- para hallar una raíz de $y(x)$

  $x_0$ E → raíz

- para hallar una raíz de $y'(x)$

  $x_0$ → f E → raíz

- para hallar $\int_a^\infty y(x)$

  a f C → $\int_a^\infty y(x)$

Ejemplo

1º) Hallar una raíz de $e^x - 2x - 2$, y otra de su derivada, así como $\int_1^2 (e^x - 2x - 2)\,dx$ con 9 cifras, y el valor de $y(x)$ para $x = \pi$, y también el de $y'(x)$ e $y''(x)$. Hallar $\int_0^\infty e^{-x^3}$

- definimos $y(x) \equiv$ LBL A, EXP, LASTx, 2, ×, −, 2, −, RTN
- raíz $\equiv$ 2 E → (2) → (1.7422450) → (1.6814231) → (1.6783545) → (1.6783470) → → 1.6783470 → A → 0
- raíz de $y'(x)$ $\equiv$ 1 f E → (1) → (0.7357588) → (0.6940414) → (0.6931474) → 0.6931471, B → 0
- integral $\equiv$ 1↑2 D → −0.3292227, con 4 intervalos, 4 f B → 4, 1↑2 f D → −0.329225728
- valor de $x = \pi$ $\equiv$ π A → 14.8575073, π B → 21,1406938, π C → 23,1398438

- se define $e^{-x^3}$, LBL A, 3, $y^x$, CHS, EXP, RTN

  0 → f C → (0.8072) → (0.0853) → $(3.1095 \cdot 10^{-5})$ → 0.8925

Nota: el método de integración es de grado 5, y por consiguiente, es exacto para polinomios de 5º grado o menos.

# Metodo de Bairstow : Raices de polimomios grado $m \leq 8$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | RCL 1 | RCI | STO C | ÷ | STO D | DSP 8 | DSP 8 | DSP 8 |
| CLREG | + | X≤Y | ISZ | RND | P⇄S | R↓ | R↓ | RCL 1 |
| STO A | P⇄S | GTO 0 | RCI | PSE | F2? | RCL D | RCL D | RCL 0 |
| RTN | STO 1 | RCL 0 | RCL A | X≠0 | GTO D | 2 | 2 | ÷ |
| LBL B | P⇄S | P⇄S | X≠Y | SF2 | RCL A | ÷ | ÷ | CHS |
| STO (i) | LBL 0 | STO B | GTO 1 | RCL E | 2 | + | −x− | −x− |
| ISZ | RCL (i) | RCL D | RCL C | + | − | −x− | x⇄y | R/S |
| RTN | P⇄S | × | RCL 9 | STO E | STO A | LASTx | GTO 3 | LBL 7 |
| LBL C | DSZ | RCL 1 | × | R↓ | P⇄S | RCL E | LBL 4 | RCL E |
| DSZ | RCL (i) | + | RCL B | RCL (i) | LBL 8 | − | RCL 1 | 1 |
| RTN | RCL D | STO C | $x^2$ | RCL B | RCL D | LBL 3 | RCL 0 | − |
| LBL D | × | 2 | − | × | $x^2$ | −x− | ÷ | STO E |
| RCL A | + | ST I | X=0 | ISZ | RCL E | F2? | CHS | RCL D |
| 2 | DSZ | LBL 1 | GTO 7 | RCL (i) | 4 | R/S | STO D | 1 |
| X=Y | SPACE | RCL (i) | ↑ | RCL 9 | × | CLx | RCL 2 | + |
| GTO 4 | RCL (i) | RCL E | ↑ | × | + | STO D | RCL 0 | STO D |
| X>Y | RCL E | RCL B | RCL (i) | − | 4 | STO E | ÷ | P⇄S |
| GTO 5 | × | STO 9 | RCL B | x⇄y | ÷ | GTO D | CHS | GTO D |
| ST I | + | × | × | ÷ | x<0 | LBL 6 | STO E | |
| RCL 0 | ISZ | + | DSZ | RND | GTO 6 | CHS | SF2 | |
| P⇄S | ISZ | RCL D | RCL C | PSE | √ | √ | GTO 8 | |
| STO 0 | STO (i) | RCL C | RCL (i) | x≠0 | STO E | 1 | LBL 5 | |
| P⇄S | P⇄S | STO B | × | SF2 | 1 | CHS | 1 | |
| RCL D | ISZ | × | − | RCL D | DSP 0 | DSP 0 | DSP 0 | |
| × | RCL A | + | x⇄y | + | PSE | PSE | PSE | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 218 |

**características**

- 218 pasos
- 26 memorias

**status**

- FIX 8, DEG
- libres etiquetas 2, 9, E, a, b, c, d, e.

**utilización**

- seleccionar grado

  $m$ A → $m$

- introducir $a_m, a_{m-1} \cdots a_0$

  $$\left.\begin{array}{l} a_m \ \text{B} \to a_m \\ a_{m-1} \ \text{B} \to a_{m-1} \\ \text{--- ---} \\ a_0 \ \text{B} \to a_0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{para borrar} \\ \text{uno erroneo, } a_i \\ \text{C } a_i \text{ B} \to a_i \end{array}$$

- calcular raices: D → $(\Delta a, \Delta b)$ → (1 ó −1) → $x_1, x_2$

  ó bien $a, b$ $(r = a + bi,\ \bar{r} = a - bi)$, etc.

| METODO DE BAIRSTOW - RAICES REALES E IMAGINARIAS, GRADO ≤ 8 | | | |
|---|---|---|---|
| GRADO | $a_K$ | $a/K$ | RESOLVER → |

~ **Ejemplo:** Resolver $3x^8 - 2x^7 - 6x^6 + 23x^5 - 23x^4 + 4x^3 + 10x^2 - 15x + 6 = 0$

8 A → 8, 3 B, −2 B, −6 B, 23 B, −23 B, 4 B, 10 B, −15 B, 6 B → 6, (C →) error, D → cálculo de las raices =

- resultan, por este orden =

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 = & 1 \\ x_2 = & -0{,}855161129 \\ x_3, x_4 = & 0{,}597849302 \\ = & -2{,}281652482 \\ x_5, x_6 = & 0{,}260913898 \pm 0{,}843507035\, i \\ x_7, x_8 = & 0{,}841901591 \pm 1{,}220851837\, i \end{array}\right. \begin{array}{l} \text{tardó normal} \\ \\ \text{tardó muchísimo} \\ \\ \text{tardó muy poco} \\ \text{instantaneo} \end{array}$$

[pares de raices reales precedidas por 1
" " " imag. " " −1]

~ **Ejemplo:** Resolver $3{,}148x^6 - 2{,}123x^5 + 1{,}897x^4 - 0{,}636x^3 - 2{,}181x^2 + 4{,}237x - 16{,}689 = 0$

- las respuestas son, por orden

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 = & 1{,}36044632 \\ x_2 = & -1{,}26102356 \\ x_3, x_4 = & 0{,}72203873 \pm 1{,}12119570\, i \\ x_5, x_6 = & -0{,}43455188 \pm 1{,}24450485\, i \end{array}\right. \begin{array}{l} \text{tardó } 5' \ 18'' \\ \\ \text{tardó } 3' \ 19'' \\ \text{tardó } 27'' \end{array} \quad \text{total, } 9' \ 4''$$

~ **Ejemplo:** Resolver $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

- las raices son, por orden:

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1, x_2 = & 0{,}19537660 \pm 0{,}84885364\, i \to 2' \ 1'' \\ x_3, x_4 = & -0{,}67835072 \pm 0{,}45853619\, i \to 1' \ 25'' \\ x_5 = & 1{,}96594824 \to 16'' \end{array}\right\} \text{total } 3' \ 42''$$

# Bridge - it

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | + | EEX | RCL 8 | x ≤ y | 2 | STO −8 | RCL 9 |
| ↑ | RTN | 2 | RCL 9 | GTO 6 | ÷ | STO +9 | + |
| + | LBL E | × | + | LBL 5 | + | GTO 5 | RCL 7 |
| STO 7 | EEX | STO 9 | RCL 7 | RCL 8 | R/S | LBL 6 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | x = y | 1 | GTO E | 2 | + |
| − | ÷ | ÷ | GTO 8 | + | LBL 7 | STO −8 | x > y |
| EEX | ↑ | ↑ | 2 | RCL 9 | 4 | STO −9 | GTO 6 |
| 2 | INT | INT | + | 1 | STO −9 | GTO 5 | GTO 5 |
| ÷ | STO 8 | x = y | x = y | + | LBL 8 | LBL 9 | |
| 1 | − | GTO 9 | GTO 7 | EEX | 1 | RCL 8 | |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 78 |

**características**

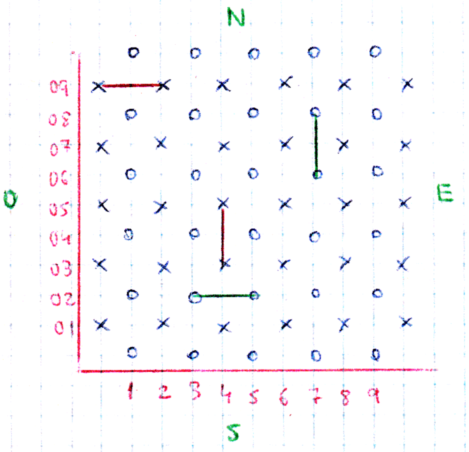
- 78 pasos
- utiliza $R_7, R_8, R_9$

**status**

- FIX 2, DEC
- utiliza LBL A, E, 5, 6, 7

## ~ Descripcion

~ El bridge-it es un juego entre el usuario y HP, cuyo desarrollo es el siguiente: Se considera el siguiente tablero mixto formado por o y x, cuyo orden m es el (p) numero de o que hay en la fila más baja, en este caso m = 5. Para efectuar las jugadas, se utiliza la nomenclatura por coordenadas que se ve.




~ La HP, que va por el camino de las x, realiza siempre el primer movimiento. El objetivo del juego es el siguiente:

- la maquina, (que posee todas las casillas x) debe tratar de tender un puente horizontal entre los extremos de su territorio, para lo cual en cada jugada puede tender un puente en sentido vertical u horizontal entre dos cualesquiera de sus casillas, con tal de que estén contiguas.
- el jugador tratará de hacer lo mismo, pero utilizando las casillas o, y su puente final debe unir N y S.
- por supuesto, dos puentes cualesquiera no pueden cruzarse entre sí.

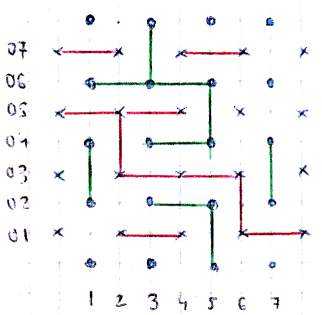
- la maquina indica sus jugadas así: (en rojo), 1.09 , 4.04
- el jugador lo mismo, pero sin punto: (en verde) 707 , 402

## ~ utilización

- introducir el orden del tablero, m A → 1ª jugada de HP
- " su propia jugada XOY R/S → 2ª " , y así sucesivamente, hasta el final.

## ~ ejemplo

Un juego en un tablero de orden 4 = 4 A → 1.07




303 R/S → 3.05 , 703 R/S → 7.01
406 R/S → 507 , 103 R/S → 204
505 R/S → 5.03 ,
404 R/S → 3.03 ,
501 R/S → 6.02 ,
402 R/S → 3.01 ,
206 R/S → 1.05 ,

y el juego ha terminado con la victoria de HP, ya que se ha establecido un puente EO.

BRIDGE - IT
m → START

## Polinomio osculador cúbico: $y = a + bx + cx^2 + dx^3$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | LBL A | RCL 3 | − | RCL D | + | 3 |
| - | STO 3 | RCL 6 | × | × | RTN | × |
| - | R↓ | + | 3 | − | LBL 0 | RCL 0 |
| - | STO 2 | × | × | STO B | ↑ | 2 |
| 5 | R↓ | RCL 2 | RCL 3 | RCL 1 | ↑ | × |
| - | STO 1 | RCL 5 | RCL 6 | GSB 0 | ↑ | RCL C |
| - | RTN | − | − | RCL 2 | RCL D | × |
| - | LBL B | 2 | + | − | × | + |
| - | STO 6 | × | RCL 0 | CHS | RCL C | RCL B |
| 10 | R↓ | − | ÷ | STO A | + | + |
| - | STO 5 | RCL 0 | STO C | LBL D | × | RTN |
| - | R↓ | STO+0 | 2 | RCL A | RCL B | |
| - | STO 4 | 3 | × | RCL B | + | |
| - | RTN | $y^x$ | RCL 1 | RCL C | × | |
| 15 | LBL C | ÷ | × | RCL D | RTN | |
| - | RCL 3 | STO D | − | −STK− | LBL e | |
| - | RCL 1 | RCL 4 | RCL 1 | RTN | STO 0 | |
| - | RCL 4 | $x^2$ | $x^2$ | LBL E | $x^2$ | |
| - | − | RCL 1 | 3 | GSB 0 | RCL D | |
| 20 | STO 0 | $x^2$ | × | RCL A | × | |
| | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 111 |

| POLINOMIO OSCULADOR CÚBICO: $P(x) = a+bx+cx^2+dx^3$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| [a] | [b] | [c] | [d] | $x \to P'(x)$ |
| $x_1 \uparrow y_1 \uparrow y_1'$ | $x_2 \uparrow y_2 \uparrow y_2'$ | $\to a, b, c, d$ | DSP $\to a, b, c, d$ | $x \to P(x)$ |

### Características

- 111 pasos,
- utiliza $R_{1,2,3,4,5,6}$, A, B, C, D.
- 4 segundos de cálculo.

### Status

- FIX 3, DEG
- utiliza LBL A, B, C, D, E, e, 0

### Utilización

- introducir $x_1, y_1, y_1'$ : $x_1 \uparrow y_1 \uparrow y_1'$ A $\to x_1$ , - calcular coeficientes : C $\to a, b, c, d$
- introducir $x_2, y_2, y_2'$ : $x_2 \uparrow y_2 \uparrow y_2'$ B $\to x_2$ , - opcional : presentar coeficientes : D $\to a, b, c, d$.
- opcional : introducir $x$ E $\to P(x)$
- opcional : introducir $x$ $f$E $\to P'(x)$

Nota : $x_1, y_1, y_1'$, $x_2, y_2, y_2'$ permanecen inalterados, y $a, b, c, d$, se encuentran en A, B, C, D resp.

Ejemplos : 1) Aproximar $y = \operatorname{sen} x$, sabiendo que para $x = 0$, $y = 0$, $y' = 1$
$x = 1$, $y = \operatorname{sen} 1$, $y' = \cos 1$

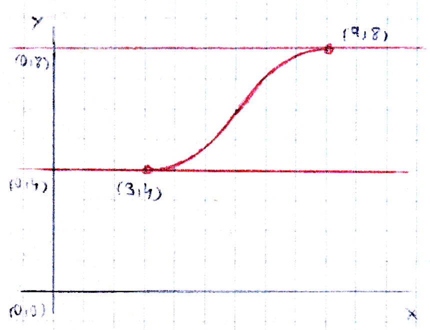
$0 \uparrow 0 \uparrow 1$ : A $\to 0$ , $1 \uparrow \operatorname{sen} 1 \uparrow \cos 1$ B $\to 1$ (esto fuerza a que $P(x)$ se coloque en $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ y $P'(x)$ en

C $\to$ 0,000 $\to$ 1,000 $\to$ −0,016 $\to$ −0,143 en $(x_1, y_1'), (x_2, y_2')$ )

es decir $\operatorname{sen} x \simeq 0.000 + 1.000\,x - 0.016\,x^2 - 0.143\,x^3$ $|E_{MAX}| = 0.001$ , $|E'_{MAX}| < 0.004$

si ahora queremos interpolar para $x = 0.5$ E $\to$ 0.478 ($\operatorname{sen} 0.5 \simeq 0.479$)
$x = 0.5$ $f$E $\to$ 0.877 ($\cos 0.5 \simeq 0.878$)

2) Hallar la ec. de la curva que representa un cambio de carril entre las dos vías representadas, y de forma que el cambio comience y acabe en el punto indicado




$x = 3$, $y = 4$, $y' = 0$ , | $3 \uparrow 4 \uparrow 0$ A $\to 3$ , $9 \uparrow 8 \uparrow 0$ B $\to 9$
$x = 9$, $y = 8$, $y' = 0$ , | C $\to$ 8.000 $\to$ −3.000 , $\to$ 0.667 $\to$ −0.037

- el cambio es $y = 8.000 - 3.000\,x + 0.667\,x^2 - 0.037\,x^3$

- es fácil ver por simetría que $x = 6$, $y = 6$ : 6 E $\to$ 6, como se preveía también, por simetría, $x = 6$, $y' = 1$ : 6 $f$E $\to$ 1, concuerda

- el cambio aparece representado en rojo --- en la figura.

# Raices de $y(x) = 0$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | LBL a | PSE | GTO 7 | GTO 7 | LASTX | GSB E | R↓ | RCL 9 |
| - | ST I | GSB E | LBL B | ST I | STO ÷ 7 | x = 0 | LBL 4 | RTN |
| - | x ⇄ y | x = 0 | CF 0 | STO − 8 | STO ÷ 7 | GTO 7 | RCL 8 | LBL E |
| - | LBL 2 | GTO 7 | GTO 3 | RCL 8 | − | F 0 ? | ÷ | RTN |
| 5 | PSE | ↑ | LBL C | ÷ | − | GTO 4 | STO − 9 | |
| - | STO 9 | ↑ | SF 0 | RCL 7 | GSB E | ST I | RND | |
| - | GSB E | RCL 7 | LBL 3 | × | RC I | EEX | x = 0 | |
| - | PSE | x ⇄ y | STO 9 | STO − 9 | − | CHS | GTO 7 | |
| - | RCL 9 | STO 7 | EEX | RND | RCL 8 | 5 | F 0 ? | |
| 10 | RC I | − | CHS | x = 0 | ÷ | STO 7 | GTO 4 | |
| - | + | ÷ | 5 | GTO 7 | 1 | RCL 9 | ABS | |
| - | GTO 2 | RCL 8 | F 0 ? | F 0 ? | + | + | 1 | |
| - | LBL A | RCL 9 | R→D | GSB 1 | RCL 7 | GSB E | D→R | |
| - | STO 9 | STO 8 | STO 7 | RCL 9 | ÷ | RC I | x > y | |
| 15 | x ⇄ y | − | + | PSE | STO − 9 | x ⇄ y | SF 0 | |
| - | STO 8 | × | GSB E | GTO 3 | RTN | RC I | LBL 4 | |
| - | GSB E | STO − 9 | STO 8 | LBL 1 | LBL D | − | RCL 9 | |
| - | STO 7 | RND | RCL 9 | RCL 9 | CF 0 | RCL 7 | PSE | |
| - | LBL 0 | x ≠ 0 | GSB E | RCL 7 | LBL 4 | ÷ | GTO 4 | |
| 20 | RCL 9 | GTO 0 | x = 0 | STO + 7 | STO 9 | STO 8 | LBL 7 | |
| | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 144 |

## Características

- 144 pasos (80 libres)
- utiliza $R_7, R_8, R_9, R_I$

## Status

- FIX 7, RAD
- libres LBL b, c, d, e, 5, 6, 8, 9

## utilización

- definir $y(x)$

  GTO E, SWITCH, $y(x)$, SWITCH

- para graficación: $gA$

  $x_0 \uparrow \Delta \rightarrow (x_i, y_i)$

RAICES DE $y(x) = 0$

| $x_0 \uparrow \Delta \rightarrow (x_i, y_i)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ITER | NEWTON | CÚBICO | PARCIAL | |
| $x_1 \rightarrow (x_i)$ | $x_1 \rightarrow (x_i)$ | $x_1 \rightarrow (x_i)$ | $x_1 \rightarrow (x_i)$ | $x \rightarrow y(x)$ |

- para resolver $y(x)$ por m. iterativo:

  $x_1$ A → $(x_i)$ → raiz

- para resolver por Newton

  $x_1$ B → $(x_i)$ → raiz

- para resolver por N. cúbico

  $x_1$ C → $(x_i)$ → raiz

- para resolver por N. parcial

  $x_1$ D → $(x_i)$ → raiz

- para evaluar $y(x)$

  $x$ → E → $y(x)$

## Notas

- el método iterativo es de 2° orden, basado en el método de la secante
- " " de Newton " " 2° " , " " $x_{m+1} \simeq x_m - h / [g(x+h)/g(x) - 1]$
- " " cúbico , " " 3° " , " " $x_{m+1} \simeq x_m - h / [g(x+h)/g(x) - 1] - \varepsilon$

$$\text{donde } \varepsilon = \frac{g''(x_m)}{2g'(x_m)} \left[ \frac{g(x_m)}{g'(x_m)} \right]^2$$ , que se evalua aproximadamente.

- el método de Newton parcial consta de 2 partes, una fase de 2° orden, con $y'$ variable, y otra de 1er orden, con $y' = \text{cte}$

## Observaciones

- el metodo de la secante es de grado intermedio entre 1 y 2, pero solo evalua $y(x)$ 1 vez por it.
- " " " Newton " " " 2°, y converge rápido, pero evalua $y(x)$ 2 veces por iterac.
- " " " N. cúbico " " " 3°, y converge muy rápido, " " $y(x)$ 3 " " "
- " " " N. parcial, al principio evalua $y(x)$ 2 veces por iterac, y es de grado 2, pero a partir de cierto punto, solo evalua $y(x)$ 1 vez, y es de grado 1.

~ todos ellos pueden fallar en converger, y su precisión depende del número de decimales en pantalla

~ **Ejemplo**: comparar los 3 métodos de Newton aplicados a $e^x + \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + \cos(\cos x) + |\operatorname{sen} x|^{\operatorname{sen} x} - 40 = 0$

- se define la ecuación a lo bruto, GTO E, switch, $y(x)$, RTN, switch
- aplicamos los métodos:

Newton normal ⇒ $x_0 = 4$ ⇒ $x_1 = 3.7314577$
$x_2 = 3.6851499$
$x_3 = 3.6839750$
$x_4 = 3.6839742$
$x_5 = 3.6839742$
tiempo total = 98 seg.

Newton cúbico ⇒ $x_0 = 4$ ⇒ $x_1 = 3.6935372$
$x_2 = 3.6839774$
$x_3 = 3.6839742$
$x_4 = 3.6839742$
tiempo total = 107 seg.

Newton parcial ⇒ $x_0 = 4$ ⇒ $x_1 = 3.7314577$
$x_2 = 3.6851499$
$x_3 = 3.6839750$
$x_4 = 3.6839742$
$x_5 = 3.6839742$
tiempo total = 80 seg.

- en este último caso, $x_1, x_2, x_3$ son calculados con Newton normal y $x_4, x_5$ con método lineal, tardando la mitad.

~ **Ejemplo**: Mostrar las diferencias entre N. normal y N. parcial, aplicados a $\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}\left[1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2}\right] - 100 = 0$

Newton normal ⇒ $x_0 = 5$,
$x_1 = 4,9023075$ , $y'(x_1) \simeq 171,65$
$x_2 = 4,8925917$ , $y'(x_2) = 168,68$
$x_3 = 4,8925053$ , $y'(x_3) = 168,64$
$x_4 = 4,8925053$ , $y'(x_4) = 168,66$
t. total ≃ 39''

Newton parcial ⇒ $x_0 = 5$
$x_1 = 4,9023075$ , $y'(x_1) = 171,65$
$x_2 = 4,8925917$ , id.
$x_3 = 4,8925068$ , id.
$x_4 = 4,8925053$ , id.
$x_5 = 4,8925053$ , id
t. total ≃ 39''

- es decir, N. parcial a partir de cierto punto fija el valor de la derivada y evita el calcularla ⇒ mayor rapidez. Es tanto más efectivo cuanto más largas son las iteraciones ⇒ cuanto más tiempo lleva calcular $y(x)$

~ **Ejemplo**: Resolver $3x^9 - x^8 - 4x^7 + 2x^6 - 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x - 3 = 0$

- hallaremos primero por donde pueden estar las raíces

0 ↑ 0,5 S A →

| x | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|
| y | -3 | 0.5957031 | -2 | 9.5449219 |

esto revela $0 < x_1 < 0.5$ , $0.5 < x_2 < 1$
$1 < x_3 < 1.5$

~ las calculamos: N. normal ⇒ 0 B → 0.3750000
0.3979201
0.3983046
0.3983047
0.3983047
luego $x_1 = 0,3983047$

N. parcial ⇒ 1 B → 0.9000020 , 0.8741163
0.8758625 , 0.8741163
0.8741253 , 0.8741163
luego $x_2 = 0.8741163$

N. cúbico ⇒ 1.5 C → 1.4434190
1.4382485
1.4382267
1.4382266
luego $x_3 = 1,4382266$

# 3x3 operaciones matriciales en cadena

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL E | LBL 3 | P≶S | GTO 7 | RCI | RCL 4 | RCL 9 | GSB 5 | ST I |
| 1 | STO D | RCL(i) | CF 0 | x≤y | RCL 8 | GSB 5 | STO 8 | x≷y |
| GSB 3 | 1 | ISZ | GTO 4 | GTO 9 | RCL 7 | STO D | RCL 2 | LBL 8 |
| STO 7 | GSB 2 | F2? | LBL a | CF 0 | RCL 5 | RCL 1 | RCL 6 | STO×(i) |
| RCL B | STO A | GTO 0 | SF 1 | CF 1 | GSB 5 | RCL 9 | RCL 5 | DSZ |
| STO 4 | 4 | ISZ | LBL A | GTO 4 | STO C | RCL 3 | RCL 3 | GTO 8 |
| RCL A | GSB 2 | ISZ | SF 0 | LBL c | RCL 3 | RCL 7 | GSB 5 | GTO 4 |
| STO 1 | STO B | × | LBL B | RCL 5 | × | GSB 5 | STO 7 | LBL e |
| 2 | 7 | + | 1 | RCL 9 | STO+0 | STO E | RCI | RCL 2 |
| GSB 3 | LBL 2 | RTN | ST I | RCL 8 | RCL 0 | RCL 2 | STO 6 | RCL 4 |
| STO 8 | STO E | LBL D | LBL 9 | RCL 6 | RTN | RCL 7 | RCL E | STO 2 |
| RCL B | RCL D | SF 0 | F0? | GSB 5 | LBL 5 | RCL 1 | STO 5 | x≷y |
| STO 5 | ST I | LBL C | F1? | STO A | × | RCL 8 | RCL D | STO 4 |
| RCL A | 0 | 9 | RCL(i) | RCL i | R↓ | GSB 5 | STO 4 | RCL 3 |
| STO 2 | GSB 1 | ST I | F1? | × | × | ST I | RCL C | RCL 7 |
| 3 | GSB 1 | LBL 7 | F2? | STO 0 | R↑ | RCL 1 | STO 3 | STO 3 |
| GSB 3 | LBL 1 | P≶S | R/S | RCL 7 | − | RCL 5 | RCL B | x≷y |
| STO 9 | SF 2 | RCL(i) | F1? | RCL 6 | RTN | RCL 4 | STO 2 | STO 7 |
| RCL B | LBL 0 | P≶S | P≶S | RCL 4 | LBL d | RCL 2 | RCL A | RCL 6 |
| STO 6 | RCL E | RCL(i) | F0? | RCL 9 | GSB c | GSB 5 | STO 1 | RCL 8 |
| RCL A | RCI | F0? | STO(i) | GSB 5 | x=0 | STO 9 | GSB e | STO 6 |
| STO 3 | STO E | CHS | F1? | STO B | 1/x | RCL 4 | RCL 0 | x≷y |
| LBL 4 | R↓ | + | P≶S | RCL 2 | RCL 3 | RCL 3 | 1/x | STO 8 |
| CLX | ST I | STO(i) | ISZ | × | RCL 8 | RCL 6 | LBL b | GTO 4 |
| RTN | R↓ | DSZ | 9 | STO+0 | RCL 2 | RCL 1 | 9 | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 224 |

**características**

- 224 pasos
- $R_{S0}$ libre

**status**

- FIX 4, DEG
- sólo LBL 6 libre
- tiempos:
  - B+A = 10 seg.
  - B−A = 10 seg.
  - B×A = 52 seg.
  - $A^t$ = 2 seg.
  - $A^{-1}$ = 17 seg.
  - DET(A) = 3 seg.
  - K.A = 7 seg.
  - ENTER↑ = 12 seg.

| 3X3 OPERACIONES MATRICIALES EN CADENA. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ENTER↑ | K.A | DET(A) | $A^{-1}$ | $A^t$ |
| ENTRADA A | SALIDA A | B+A | B−A | B×A |

- utilización

- las operaciones se realizan por medio de un STACK matricial de 2 registros, A, B. Las operaciones se realizan como sigue:

ENTRADA A = introduce una matriz en el "registro" A, borrando cualquier otra previa, y dejando B intacto.

$A \rightarrow 1,\ a_{11}\ R/S \rightarrow 2,\ a_{12}\ R/S \rightarrow 3,\ a_{13}\ R/S \rightarrow 4,\ a_{21}\ R/S \rightarrow \cdots \rightarrow 9,\ a_{33}\ R/S \rightarrow 0.00$

SALIDA A = presenta la matriz que ocupa A, dejando intactos A y B

$B \rightarrow a_{11}, R/S \rightarrow a_{12}, R/S \rightarrow a_{13}, R/S \rightarrow a_{21}, R/S \rightarrow a_{22}, R/S \rightarrow a_{23}, R/S \rightarrow a_{31}, R/S \rightarrow a_{32}, R/S \rightarrow a_{33}, R/S \rightarrow 0.00$

B+A = realiza la suma de las matrices colocadas en A y B, dejando el resultado en A, y B intacto

$C \rightarrow 0.00$ (esto es $B + A \rightarrow A$)

B−A = resta la matriz A de la matriz B, colocando el resultado en A y dejando B intacto

$D \rightarrow 0.00$

B×A = multiplica en este orden la matriz en B por la matriz en A, dejando el resultado en A, y B intacto = $E \rightarrow 0.00$

ENTER↑ = duplica la matriz que hay en A en B, dejando A intacto = $f A \rightarrow 0.00$

K.A = multiplica el escalar K por la matriz en A, dejando el resultado en A, y B intacto

$K\ f B \rightarrow 0.00$

**DET(A)** = presenta en pantalla el valor del determinante de la matriz en A, dejando A y B intactos

f C → DET(A)

**$A^{-1}$** = calcula la inversa de la matriz en A, y deja el resultado en A, quedando B intacto, = f D → 0.00

**$A^{t}$** = calcula la traspuesta de la matriz en A, dejando el resultado en A, y dejando B intacto.

**P⇄S** = intercambia entre sí las matrices comprendidas en A y B. Se opera desde teclado, f P⇄S

(el "registro" A abarca desde $R_1$ hasta $R_9$, y el "registro" B, desde $R_{S1}$ a $R_{S9}$, inclusive).

**Ejemplos**: Dada la matriz $M = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}$, hallar su determinante, y calcular el valor de $M^3+M^2+M+I$

- el determinante = la introducimos A → 1, 4 R/S → 2, 3 R/S → 3, 1 R/S → 4, 1 R/S → 5, 1 R/S → 6, 3 R/S → 7, 6 R/S → 8, 5 R/S → 9, 9 R/S → 0.00, f C → 2.0000

- el valor de $M^3+M^2+M+I$ = la secuencia va a ser (M=B) ↑ × + × + P⇄S I +, y este será el contenido de los registros A, B.

| | (B=M) | ↑ | × | + | × | + | P⇄S | I | + |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | - | M | M | M | M | M | $M^3+M^2+M$ | $M^3+M^2+M$ | $M^3+M^2+M$ |
| A | M | M | $M^2$ | $M^2+M$ | $M^3+M^2$ | $M^3+M^2+M$ | M | I | $M^3+M^2+M+I$ |

- operando = M ya ha sido introducida, así que f A, E, C, E, C, f P⇄S, ahora, introducir I

A → 1, 1 R/S → 2, 0 R/S → 3, 0 R/S → 4, 0 R/S → 5, 1 R/S → 6, 0 R/S → 7, 0 R/S → 8, 0 R/S → 9, 1 R/S → 0.00

seguimos: C, B → 282, R/S → 228, R/S → 306, R/S → 321, R/S → 264, R/S → 393, R/S → 1101, R/S → 900, R/S → 1317,

es decir, $M^3+M^2+M+I = \begin{bmatrix} 282 & 228 & 306 \\ 321 & 264 & 393 \\ 1101 & 900 & 1317 \end{bmatrix}$

2) Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, hallar $Q = PAP^{-1}$

- la sec. de operaciones va a ser P, P⇄S, A, ×, P⇄S, INV, ×. El STACK se comportará así:

| | P | P⇄S | A | × | P⇄S | INV | × |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | - | P | P | P | PA | PA | PA |
| A | P | - | A | PA | P | $P^{-1}$ | $PAP^{-1}$ |

el STACK se comporta como el stack operativo de la calculadora, sólo que con la limitación de 2 registros

- introducimos P = A → 1, 5 R/S → 2, 2 R/S → 3, 3 R/S → 4, 2 R/S → 5, 6 R/S → 6, 1 R/S → 7, 5 R/S → 8, 3 R/S → 9, 3 R/S → 0.00

P⇄S, introducir A = A → 1, 1 R/S → 2, 2 R/S → 3, 1 R/S → 4, 3 R/S → 5, 2 R/S → 6, 5 R/S → 7, 6 R/S → 8, 3 R/S → 9, 8 R/S → 0.00

- y operamos, = (×) E, P⇄S, (INV) f D, (×) E → 0.00.

- Recuperando el resultado, = B → -524 R/S → -108 R/S → 573 R/S → -589 R/S → -122 R/S → 643 R/S → -601 R/S → -124 R/S → 657

es decir, que por último, ha resultado:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -524 & -108 & 573 \\ -589 & -122 & 643 \\ -601 & -124 & 657 \end{bmatrix}$$

# Funciones elípticas de 1ª especie

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | LBL D | RCL 8 | 7 | 1 | CF 0 | GTO 8 | RCL 1 | LBL 2 | R↓ |
| - | SF 1 | $x^2$ | N! | RCL 0 | F1? | LBL A | × | RCL 4 | RTN |
| - | GSB C | STO 3 | ÷ | − | RTN | GSB 1 | $SIN^{-1}$ | ABS | LBL b |
| - | GTO 0 | STO 1 | × | √ | GTO 2 | LBL 8 | STO+0 | RCL 7 | P≷S |
| 5 | LBL E | STO 0 | RCL 1 | × | LBL e | STO 0 | 2 | RCL 6 | RCL 8 |
| - | SF 1 | 1 | RCL 0 | 1 | SF 1 | RCL 8 | STO÷0 | R↑ | P≷S |
| - | GSB C | + | ÷ | RCL 3 | LBL d | STO 1 | R↓ | RCL 5 | RTN |
| - | RCL 8 | STO 2 | − | RCL 0 | GSB 1 | STO 2 | R↓ | x≷y | |
| - | × | STO×0 | × | STO×0 | $x^2$ | LBL 3 | STO 1 | P≷S | |
| 10 | LBL 0 | $x^2$ | × | × | 1 | √ | STO÷2 | RTN | |
| - | $x^2$ | RCL 1 | RCL 2 | − | − | 2 | RCL 3 | LBL 1 | |
| - | 1 | 1 | 6 | √ | CHS | × | x≷y | P≷S | |
| - | − | 2 | ÷ | × | √ | RCL 1 | x≤y | STO 4 | |
| - | CHS | × | + | 1 | F1? | EEX | GTO 3 | R↓ | |
| 15 | √ | + | × | RCL 3 | GTO 6 | CHS | 1 | STO 5 | |
| - | CF 1 | STO 1 | × | RCL 0 | GTO 7 | 9 | $TAN^{-1}$ | R↓ | |
| - | GTO 2 | RCL 2 | 1 | × | LBL 6 | $e^x$ | RCL 0 | STO 6 | |
| - | LBL B | × | − | − | CF 1 | 1/x | 2 | R↓ | |
| - | SF 0 | RCL 0 | × | ÷ | RCL 8 | STO 3 | ÷ | STO 7 | |
| 20 | LBL C | 5 | CHS | F2? | ÷ | CLX | + | R↓ | |
| - | SF 3 | N! | LBL 4 | GTO 4 | GTO 7 | 1 | TAN | RTN | |
| - | SF 2 | STO 0 | STO 0 | F3? | LBL c | + | LN | LBL a | |
| - | GSB 1 | × | STO×0 | GTO 4 | GSB 1 | ÷ | RCL 2 | P≷S | |
| - | 8 | + | 2 | F0? | LBL 7 | RCL 0 | √ | STO 8 | |
| 25 | ÷ | × | × | $SIN^{-1}$ | $SIN^{-1}$ | SIN | ÷ | P≷S | |
| | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 207 |

**características**

- 207 pasos
- 9 mem. ocupadas, libres $R_0 - R_9$, $R_A - R_I$, $R_{S9}$

**status**

- FIX 4, DEG, CF0, CF1, CF2, CF3
- libre LBL 9

**tiempos:**

| | |
|---|---|
| A ~ 23 seg | a ~ 1 seg. |
| B ~ 14 seg | b ~ 1 seg |
| C ~ 13 " | c ~ 23 " |
| D ~ 13 " | d ~ 25 " |
| E ~ 14 " | e ~ 27 " |

| FUNCION ELIPTICA DE 1ª ESPECIE $u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sen^2\varphi}}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| STO K | RCL K | sn u → u | cn u → u | dn u → u |
| φ → u | u → φ | u → sn u | u → cn u | u → dn u |

- funciona en cualquier modo angular.

- **utilización**

- esta basado en $u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sen^2\varphi}}$, $\varphi = am\, u$, $sn\, u = sen\, \varphi = sen\, am\, u$

  $cn\, u = \sqrt{1-sn^2 u}$, $dn\, u = \sqrt{1-k^2 sn^2 u}$

- funciona en cualquier modo angular.

- A, B, C, D, E, c, d, e actuan como funciones incorporadas, es decir:

$$\begin{array}{c|c} T & t \\ Z & z \\ Y & y \\ X & x \end{array} \xrightarrow{A,B,C,D,E,c,d,e} \begin{array}{c|c} T & t \\ Z & z \\ Y & y \\ X & f(x) \\ LAST\ X & x \end{array}$$

sustituyen x por f(x), conservan inalterado el resto de la escala, y almacenan x en LAST X

- a almacena el nº en pantalla en $R_{S8}$ y efectua R↓ dejando en ella el valor que había previamente
- b recupera el nº contenido en $R_{S8}$ (que es k)
- todos los registros primarios disponibles, así como $R_{S9}$
- precisión

  A → para k, φ entre sen 0° y sen 90° y 0° - 90° respect., 8 a 9 cifras. Cerca de los extremos se afecta la precisión. Identicamente para LBL c, d, e

  B → para k entre 0 y 1, desde u = 0 hasta u = 1,8, unas 8 cifras

  " u = 1,8 " u = 2,5 , " 6 "

  en adelante, pierde precisión, hasta u = 7, que sólo proporciona 2 cifras.

  Identicos límites para LBL C, D, E

- rango de valores para el argumento

A → $0 < k \leq 1$ , $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ es el rango normal, pero pueden utilizarse valores mayores de $-90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ$ $\varphi$ ó de $k$, con tal de que $\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}$ esté definido.

B → $0 \leq k \leq 1$ , $0 \leq u \leq 7$ es el rango usual, pero funciona también para valores de k y u fuera de este rango, incluso $k > 1$ , $k < 0$ , $u < 0$

C, D → mismas restricciones que B

E → mismas restricciones de B, pero cuidando que $\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u}$ esté definido

C, d, e → restricciones de A, pero además $\operatorname{sn} u \leq 1$, $\operatorname{cn} u \leq 1$, dn según k.

## ~ Ejemplos:

-1) demostrar la relación $\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{dn} 2u}} = \dfrac{k \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$ para $k = \operatorname{sen} 15^\circ$, $u = 63^\circ$

h DEG , 15 f SIN, f A , 63 ↑ 2 x , E → Error . Esto es debido a que u = 63 hace que dn u quede fuera de rango.

- Por ello, comprobaremos la igualdad para el mismo k y u = 1,27 . Siempre, después de un Error es necesario hacer f CLx ; h DEG , 15 f SIN , f A , 1,27 STO 0 , 2 x E , 1 , x ≷ y , − , 1 , LAST x , + , ÷ , √ → $\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{dn} 2u}{1+\operatorname{dn} 2u}} = 0.079158802$

RCL 0, C , RCL 0 , D , RCL 0 , E → la escala está ahora así →

| | |
|---|---|
| T | 0,079... |
| Z | sn u |
| Y | cn u |
| X | dn u |

÷ , x , f B , x , − = $8,19 \cdot 10^{-9} \sim 0$

y la igualdad ha quedado comprobada para ese caso particular.

-2) Calcular $\dfrac{\operatorname{sn} 0,41 - \operatorname{cn}^2 0,73}{\operatorname{dn}^{-1} 0,82 \cdot \operatorname{dn} 0,82} + 3 \operatorname{sn}^{-1} 0,92$ , para k = 0,67 , valores en radianes.

- se procede como sigue: h RAD , 0.67 f A → 0.00 , 0.41 C → 0.3940 , 0.73 D → 0.7622 , $x^2$ − → −0.1870 , 0.82 f E → 1.1023 , LAST x E → 0.8810 , x ÷ → −0.1925 , 0.92 f C → 1.2815 , 3 x + → 3.6520

obsérvese el uso realizado de la escala y del last x , que son conservados a través de los cálculos.

-3) Hallar $u = \displaystyle\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-4\operatorname{sen}^2 x}}$ , y también $\varphi$ tal que $\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-3\operatorname{sen}^2 x}} = 0.2280470434$

- el primero , h RAD , 4 √ , f A , 0.5 A → u = 0.677417537
- " segundo , " , 3 √ , f A , 0,2280470434 B → φ = 0.222222222

} ambos son casos de k > 1

-4) Comprobar que $\operatorname{dn}(u + 2K) = \operatorname{dn} u$ , siendo $K = u(90^\circ)$, para u = 0.23 , k = sen 5° , en DEG

- hallamos K ; h DEG , 5 SIN , f A , 90 , A → 1.573792132 ,
- hallamos dn 0.23 ; 0.23 E → 0.999802607 ,
- hallamos dn (0.23 + 2K) ; x ≷ y , LAST x , x ≷ y , 2 x + E → 0.999802607

} son iguales, como se suponía

# Funciones especiales

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL D | + | ÷ | x≷y | RCL 1 | 1 | LBL C | STO 1 | CL x |
| GSB 5 | x≷y | STO 2 | GTO 1 | 2 | − | P⇄S | ÷ | RCL 8 |
| STO 3 | GTO 0 | LBL 1 | GTO 6 | + | × | RCL 9 | RCL 9 | RCL 7 |
| $x^2$ | GTO 6 | RCL 2 | LBL E | STO 1 | RCL 1 | P⇄S | 2 | RCL 6 |
| CHS | LBL B | RCL 0 | GSB 5 | ÷ | 2 | RTN | × | R↑ |
| STO 1 | GSB 5 | × | STO 0 | STO 2 | STO+1 | LBL a | RCL 1 | P⇄S |
| 1 | STO 2 | RCL 1 | CHS | + | + | SF 0 | + | RTN |
| STO 2 | $x^2$ | 4 | STO×0 | x≷y | $x^2$ | LBL b | ÷ | LBL 5 |
| RCL 3 | $x^2$ | × | CHS | GTO 3 | ÷ | GSB 5 | STO 2 | P⇄S |
| LBL 0 | CHS | × | STO 2 | GTO 6 | STO 2 | STO 4 | + | STO 5 |
| RCL 1 | STO 0 | RCL 1 | 1 | LBL d | + | $x^2$ | x≷y | R↓ |
| RCL 2 | 1 | 1 | STO 1 | GSB 5 | x≷y | F0? | GTO 4 | STO 6 |
| 1 | STO 1 | + | RCL 2 | $x^2$ | GTO 2 | CHS | RCL 4 | R↓ |
| + | RCL 2 | ÷ | LBL 3 | STO 0 | π | STO 0 | 2 | STO 7 |
| ÷ | GTO 1 | RCL 1 | RCL 2 | 0 | × | 0 | ÷ | R↓ |
| LAST X | LBL A | 3 | RCL 0 | STO 1 | 2 | STO 1 | RCL 9 | STO 8 |
| 1 | GSB 5 | + | × | 1 | ÷ | 1 | $y^x$ | R↓ |
| + | CHS | ÷ | RCL 1 | CHS | CHS | STO 2 | RCL 9 | RTN |
| STO 2 | STO 0 | RCL 1 | 2 | STO 2 | GTO 6 | LBL 4 | N! | |
| ÷ | 3 | 4 | × | LBL 2 | LBL c | RCL 2 | ÷ | |
| RCL 3 | STO 1 | STO+1 | × | RCL 2 | P⇄S | RCL 0 | × | |
| × | $y^x$ | + | RCL 1 | RCL 0 | STO 9 | × | CF 0 | |
| STO 3 | CHS | ÷ | 1 | × | R↓ | RCL 1 | LBL 6 | |
| RCL 2 | STO×0 | STO 2 | + | RCL 1 | P⇄S | 2 | RCL 5 | |
| ÷ | 3 | + | ÷ | $x^2$ | RTN | + | ABS | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 218 |

## Características

- 218 pasos
- $R_0$ a $R_9$, $R_A$ a $R_I$ libres

## Status

- FIX 4, DEG, CF0, CF1, CF2, CF3
- libres LBL 7, 8, 9, e

## Rangos

A → $-4 \le x \le 4$

B → $-4 \le x \le 4$

D → $-20 \le x \le 20$

E → $-4 \le x \le 4$

a → $-20 \le x \le 20$, $x \neq 0$

b → $-20 \le x \le 20$, $x \neq 0$

d → $-1 \le x \le 1$

FUNCIONES ESPECIALES

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \to J_m(x)$ | $x \to I_m(x)$ | STO m | $k \to \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}$ | | $(R_0-R_9)$ $(R_A-R_I)$ |
| $x \to \int_0^x \operatorname{sen} x^2$ | $x \to \int_0^x \cos x^2$ | RCL m | $x \to \int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ | $x \to \int_0^x e^{-x^2}$ | |

## Utilización

- calcula indistintamente las integrales de seno y coseno de Fresnell $= \int_0^x \operatorname{sen} x^2\,dx$, $\int_0^x \cos x^2\,dx$, la integral de seno $= \int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, la integral de probabilidades $= \int_0^x e^{-x^2}\,dx$, las funciones de Bessel y Bessel modificadas de orden m $= J_m(x)$, $I_m(x)$, y la integral elíptica completa de 2ª especie $= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$
- funciona em qualquier modo angular.
- A, B, D, E, a, b, d actuam como funciones incorporadas, es decir:

$$\begin{array}{c|c} T & t \\ Z & z \\ Y & y \\ X & x \end{array} \xrightarrow{A,B,D,E,a,b,d} \begin{array}{c|c} T & t \\ Z & z \\ Y & y \\ X & f(x) \\ \text{LAST X} & x \end{array}$$

sustituyem x por f(x), dejan inalterado el resto de la escala, e introducem x em LAST X

- LBL c almacena el nº en pantalla en $R_{S9}$, y efectua R↓ dejando en ella el x anterior
- LBL C recupera el nº de $R_{S9}$, que es m. Si no se utilizan $J_m(x)$ ni $I_m(x)$, puede ser utilizado como memoria rápida = ahorra 1 pulsación de tecla en cada RCL
- todos los registros primarios disponibles (inalterados por los cálculos).

## Rangos de utilización, tiempo, precisión

$\int_0^x \operatorname{sen} x^2$, $\int_0^x \cos x^2$ = para $-4 \le x \le 4$

| | | | |
|---|---|---|---|
| hasta | $x = \pm 1$ | 13 seg | $< 10^{-9}$ |
| " | $= \pm 2$ | 24 " | $2 \cdot 10^{-9}$ |
| " | $= \pm 3$ | 38 " | $7 \cdot 10^{-8}$ |
| " | $= \pm 4$ | 57 " | $2 \cdot 10^{-5}$ |

$\int_0^x \frac{\text{sen}\,x}{x}\,dx$ , para $-20 \leq x \leq 20$ , hasta $x = \pm 1$ - 11'' , $< 10^{-9}$ ; $= \pm 5$ - 22'' , $10^{-9}$ ; $= \pm 10$ - 32'' , $2.10^{-8}$ ; hasta $x = \pm 15$ - 42'' , $5.10^{-6}$ ; $\pm 20$ - 53'' , $4.10^{-4}$

$\int_0^x e^{-x^2}\,dx$ , para $-4 \leq x \leq 4$ , hasta $x = \pm 1$ - 22'' , $< 10^{-9}$ ; $= \pm 2$ - 40'' , $< 10^{-9}$ ; hasta $x = \pm 3$ - 63'' , $7.10^{-8}$ ; $= \pm 4$ - 1'35'' , $3.10^{-6}$

$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \text{sen}^2\theta}\,d\theta$ , para $-1 \leq x \leq 1$ , hasta $x = 0.2$ - 11'' , $x = 0.8$ - 51'' ; $= 0.4$ - 16'' , $= 0.9$ - 1'37'' ; $= 0.6$ - 27'' , $= 0.95$ - 3' ; precisión $\leq 10^{-9}$

Funciones de Bessel $J_m(x)$ ; $I_m(x)$ , para $-20 \leq x \leq 20$ , m variable según x (por overflow) , prec. y t = variables.
$x \neq 0$ (hacer $x = 10^{-9}$)

## ~ Ejemplos

-1) Hallar $\int_0^1 e^{-x^2}$ , $\int_0^{-1} \text{sen}\,x^2$ , $\int_0^{\pi/2} \cos x^2$ , $\int_0^{15} \frac{\text{sen}\,x}{x}$ , $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{4}\text{sen}^2\theta}$ , $J_0(\pi)$, $I_3(e)$, en DSP 6

- realizamos los cálculos según la secuencia siguiente : DSP 6

1 E → $\underline{0.746824}$ $(= \int_0^1 e^{-x^2} dx)$ , $\frac{1}{4}$ √ f D → $\underline{1.467462}$ $(= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{4}\text{sen}^2\theta}\,d\theta)$

-1 A → $\underline{-0.310268}$ $(= \int_0^{-1} \text{sen}\,x^2 dx)$ , 0 f C , π f A → $\underline{-0.304242}$ $(= J_0(\pi))$

π/2 B → $\underline{0.849139}$ $(= \int_0^{\pi/2} \cos x^2 dx)$ , 3 f C , e f B → $\underline{0.651309}$ $(= I_3(e))$

15 D → $\underline{1.618189}$ $(= \int_0^{15} \frac{\text{sen}\,x}{x} dx)$ ,

-2) Hallar $5\int_1^2 e^{-x^2} + 2\int_{-1}^3 \text{sen}\,x^2\,dx$ , en DSP6.

- hacemos uso de que $\int_1^2 e^{-x^2} = \int_0^2 e^{-x^2} - \int_0^1 e^{-x^2}$ , y $\int_{-1}^3 \text{sen}\,x^2 = \int_0^3 \text{sen}\,x^2 - \int_0^{-1} \text{sen}\,x^2$.

5 ↑ 2 E , 1 E , − , x , 2 ↑ 3 A , −1 A , − , x , + = $\underline{2.843948}$ (Se hizo uso de la escala operativa)

-3) Hallar aproximadamente $\int_0^1 J_1(x)\,dx$ , utilizando la formula de Simpson , en DSP6. , h = 0.25

- será $\int_0^1 J_1(x)\,dx \approx \frac{0.25}{3} [J_1(0) + 4J_1(0.25) + 2J_1(0.5) + 4J_1(0.75) + J_1(1)]$ , procedemos

1 f C , $0 = 10^{-9}$ f A , .25 f A , 4 x + , .5 f A , 2 x + , .75 f A , 4 x + , 1 f A , + , .25 x , 3 ÷ → $\underline{0.234805}$

- ahora bien, sabemos que $\int_0^1 J_1(x)\,dx = -J_0(1) + J_0(0)$ = 0 f C , 1 f A , $10^{-9}$ f A , − , CHS → $\underline{0.234802}$

-4) Calcular sen 1 $= 2[J_1(1) - J_3(1) + J_5(1) - J_7(1) + J_9(1) - \cdots]$

- operamos ; 1 f C , 1 f A , 3 f C , 1 f A , − , 5 f C , 1 f A , + , 7 f C , 1 f A , − , 9 f C , 1 f A , + , 2 x → $\underline{0.841470985}$

- puesto que sen 1 = $\underline{0.841470985}$, la convergencia es rápida

# Regresión lineal de dos variables: aplicaciones

~ el programa "regresión lineal de dos variables" está originalmente diseñado para ajustar por mínimos cuadrados una función lineal de la forma $z = a + bx + cy$ a un conjunto de datos. de la forma $(x_i, y_i, z_i)$

— Sin embargo, mediante adecuados cambios de variable, es posible utilizar la segunda variable independiente, y, para ajustar datos de la forma $(x_i, y_i)$ a una amplia variedad de funciones, con la ventaja de disponer de 3 parámetros, a, b, c, y el procedimiento de mín. cuadrados.

## Ejemplos:

~ 1) Disponiendo de 3 parámetros: a, b, c, ajustar una función adecuada a $\Gamma(x)$, $1 \le x \le 2$,

| x | 1 | 1.2 | 1.4 | 1.6 | 1.8 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Γ(x) | 1 | 0.918169 | 0.887264 | 0.893515 | 0.931384 | 1 |

~ ahora demostraremos algunas de las posibles variaciones que se pueden obtener:

| Forma de la función | a | b | c | $r^2$ | $\lvert E_{MAX} \rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a + bx + cx^2$ | 1.906964 | -1.369333 | 0.458630 | 0.989 | 0.006023 |
| $a + bx + cx^3$ | 1.588566 | -0.696324 | 0.101105 | 0.968 | 0.009518 |
| $a + bx + cx^4$ | 1.430472 | -0.472723 | 0.032577 | 0.939 | 0.012587 |
| $a + bx + c\sqrt{x}$ | 4.793672 | 2.680757 | -6.474277 | 0.9995 | 0.001497 |
| $a + bx + cLx$ | -0.331590 | 1.332852 | -1.927889 | 0.997 | 0.002972 |
| $a + bx + ce^x$ | 1.363288 | -0.907581 | 0.197254 | 0.955 | 0.010922 |
| $a + bx + c\,\text{sen}\,x$ | 1.716028 | 0.070839 | -0.940037 | 0.987 | 0.006715 |
| $a + bx + c.\text{arctg}\,x$ | 2.451348 | 1.003620 | -3.125141 | 0.999 | 0.002274 |
| $a + b\,\text{sen}\,x + ce^x$ | 1.691102 | -0.872532 | 0.014262 | 0.985 | 0.007051 |
| $a + b\,\text{sen}\,x + c\,\text{sen}\,2x$ | 1.808069 | -0.920163 | -0.040502 | 0.994 | 0.004915 |
| $a + bx + c.\cos x$ | 9.551188 | -5.488547 | -5.698549 | 0.116 | 0.054473 |
| $a \cdot x^b \cdot e^{cx}$ | 0.244918 | -2.036849 | 1.408381 | 0.997 | 0.002533 |
| $[a + bx + c\sqrt{x}]^8$ | 1.497553 | 0.351611 | -0.849120 | 0.9999 | 0.000631 |

~ Em general, con 3 parámetros disponibles podremos ajustar cualquier relación funcional entre y y x que deje 3 libertades. Sin embargo, las más útiles son de la forma:

$$y = a.f(x) + b.g(x) + c.h(x)$$

$$y = f(ax) . g(bx) . h(cx)$$

entre otras. Por ejemplo, para ajustar una curva de la forma

$$y = a \operatorname{sen} x . e^{bx} . x^{c}$$

- tomando logaritmos : $Ly = La + L\operatorname{sen}x + bx + cLx$
- restando $L\operatorname{sen}x$ : $L\frac{y}{\operatorname{sen}x} = La + bx + cLx$ , que es de la forma $z = a + bx + cy$ y puede ser ajustada

- Em este plan, se recomiendan las relaciones funcionales siguientes:

$y = a\operatorname{sen}x + b\operatorname{sen}2x + c\operatorname{sen}3x + k$ , ($k = y(0)$ si se conoce)

$y = a\operatorname{sen}x + b\cos x + c\operatorname{tg}x + k$ ($k = y(0)$ " " " )

$y = ae^{x} + b\operatorname{sen}x + cLx$

$y = a + be^{x} + ce^{2x}$

$y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$

≈ Como remate final a los ejemplos de antes, los ajustes siguientes:

1) $\Gamma(x) \simeq a\sqrt{x} + b\operatorname{sen}x + c.\operatorname{tg}^{-1}x$

$\begin{cases} a = 10{,}227084 \\ b = 1{,}718522 \\ c = -13{,}583381 \end{cases}$ , $r^2 = 0{,}989$, $|E_{MAX}| = 0{,}014655$

2) $\Gamma(x) \simeq 1 + a\operatorname{sen}x + b\operatorname{sen}2x + c\operatorname{sen}3x$

$\begin{cases} a = 0{,}011646 \\ b = -0{,}037072 \\ c = 0{,}127519 \end{cases}$ , $r^2 = 0{,}968$ , $|E_{MAX}| = 0{,}011215$

3) $\Gamma(x) \simeq [a + bx + cx^2]^2$

$\begin{cases} a = 1{,}466034 \\ b = -0{,}703567 \\ c = 0{,}235661 \end{cases}$ , $r^2 = 0{,}989$, $|E_{MAX}| = 0{,}005555$

4) $\Gamma(x) \simeq a\sqrt{x} + b\sqrt[3]{x} + c\sqrt[4]{x}$

$\begin{cases} a = 40{,}056649 \\ b = -130{,}176614 \\ c = 91{,}120847 \end{cases}$ , $r^2 = 0{,}9994$ , $|E_{MAX}| = 0{,}002723$

5) $\Gamma(x) \simeq [a + bx + c\sqrt{x}]^2$

$\begin{cases} a = 2{,}949437 \\ b = 1{,}377594 \\ c = -3{,}326901 \end{cases}$ , $r^2 = 0{,}9997$, $|E_{MAX}| = 0{,}001000$

# Análisis de inversiones - Valor Presente Neto - Amortizaciones

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | LBL A | LBL C | RND | DSZ | 0 | RTN | + | 1 | R↑ |
| - | STO E | DSP 2 | x=0 | LBL 1 | RTN | LBL d | RCL 4 | − | x≷y |
| - | DSP 0 | 2 | GTO 7 | × | LBL D | STO 3 | CHS | RCL 1 | -STK- |
| - | RTN | 0 | R↓ | RCL(i) | STO D | R↓ | $y^x$ | ÷ | RC I |
| 5 | LBL a | STO D | F0? | + | x≷y | STO 2 | STO 7 | RCL 2 | RCL 9 |
| - | DSZ | LBL 2 | PAUSE | DSZ | LBL 4 | R↓ | 1 | × | x=y |
| - | RC I | 1 | GTO 2 | GTO 1 | STO C | EEX | − | RCL 3 | GTO 9 |
| - | GTO 0 | D→R | LBL 7 | × | GSB E | 2 | RCL 1 | + | ISZ |
| - | LBL B | + | RCL D | RCL 0 | RCL C | ÷ | ÷ | RCL 7 | GTO 8 |
| 10 | DSP 0 | GSB E | RTN | + | PAUSE | STO 1 | RCL 2 | ÷ | LBL 9 |
| - | 0 | STO C | LBL E | RTN | x≷y | 0 | × | − | RCL 8 |
| - | ST I | RCL D | DSP 2 | LBL b | PAUSE | RTN | RCL 3 | RCL 2 | -x- |
| - | LBL 0 | GSB E | EEX | 0 | RCL D | LBL e | + | + | RCL 0 |
| - | R/S | RCL C | 2 | ST I | RCL C | DSP 2 | RCL 7 | RC I | -x- |
| 15 | F3? | x≷y | ÷ | LBL 3 | + | STO 9 | ÷ | RCL 2 | RTN |
| - | GTO 6 | − | 1 | DSP 0 | GTO 4 | R↓ | STO 6 | R↑ | |
| - | R↓ | LAST X | + | PAUSE | LBL c | ST I | RCL 1 | R↑ | |
| - | R↓ | x≷y | 1/x | RCL(i) | F0? | 0 | 1 | STO+8 | |
| - | LBL 6 | ÷ | RCL E | DSP 2 | GTO 5 | STO 0 | + | x≷y | |
| 20 | STO(i) | D→R | ST I | PAUSE | SF 0 | STO 8 | RCL 4 | R↓ | |
| - | ISZ | RCL D | R↓ | ISZ | 1 | LBL 8 | 1 | − | |
| - | RCL E | x≷y | ↑ | RCL E | RTN | RC I | − | STO+0 | |
| - | RC I | − | ↑ | RC I | LBL 5 | STO 4 | CHS | x≷y | |
| - | x≤y | STO D | ↑ | x≤y | CF 0 | RCL 1 | $y^x$ | LAST X | |
| 25 | GTO 0 | LAST X | RCL(i) | GTO 3 | 0 | 1 | STO 7 | R↑ | |
| | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 215 |

Características

- 215 pasos
- todos los registros utilizados

Status

- FIX 2, DEG, CF0, 1, 2, 3
- todas las etiquetas utilizadas.

Tiempos

- totalmente variable, según nº de flujos

| ANALISIS DE INV. CON FL. DE CAJA DESIG (HASTA 21) - NPV - AMORTIZAC. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| DELETE | REVIEW | PAUSE? | i%↑PMT↑PV | P1↑P2→AMORT |
| Nº DE FLUJOS | CASH FLOW → | →IRR | i%↑Δ→PVA | i%→NPV |

## Utilización

### ≡ 1ª parte ≡ Analisis de inversiones con flujos de caja desiguales (hasta 21)

convenios ≡
- dinero recibido (+), dinero pagado (−)
- $F_0$ es la inversión inicial
- las i se calculan e introducen en %
- para alterar un $F_n$ dado, $F_n$ STO n

~ INTRODUCCION DEL nº FLUJOS

n A → n (DSP 0) (n ≤ 21)

~ INTRODUCCION DE LOS FLUJOS DE CAJA (HASTA 21)

B → 0 (DSP 0), $F_0$ R/S
→ 1 (DSP 0), $F_1$ R/S
- - - - - - - - - - -
→ n (DSP 0), $F_n$ R/S → IRR % (DSP 2) (calcula automáticamente el IRR)

Corrección de un error: Ej, $F_3$ erróneo ≡ --- → 3 (DSP 0), $F_3$ erróneo R/S
→ 4 f A
→ 3 (DSP 0), $F_3$ correcto R/S
→ 4, etc

flujos idénticos: simplemente, cuando un flujo es igual al anterior, apretar R/S

## ~ REVISION DE LOS FLUJOS DE CAJA

fB → 0 (DSP0) → $F_0$ (DSP2) ~ para cambiar $F_m$, $F_m$ STO m
→ 1 (DSP0) → $F_1$ (DSP2)
- - - - - - - - - - - - - -
→ m (DSP0) → $F_m$ (DSP2) → 0.00

## ~ CALCULO DEL IRR %

C → IRR % (DSP2) , IRR = tasa de rendimiento interno = porcentaje de devolución interno

~ se emplea un método iterativo en el calculo del IRR. La aproximación inicial es IRR = 20 %. El programa se detiene cuando la diferencia entre dos aproximaciones consecutivas es $\varepsilon < 0.01$

Se puede observar la convergencia de las aproximaciones, utilizando fC

fC → 1.00 (pausa)
fC → 0.00 (sin pausa)
etc

entonces, si la pausa está puesta, al pulsar C
C → ($IRR_1$) → ($IRR_2$) → ... → IRR %

## ~ PERFIL DE VALOR ACTUAL (PVA)

- introducir $i_0$ % inicial y el incremento Δ, y se obtendrá la curva del perfil de valor actual.

$i_0$ % ↑ Δ D → $i_0$ % (DSP2) → $NPV_0$ (DSP2)
→ $i_1$ % (DSP2) → $NPV_1$ (DSP2)
- - - - - - - - - - - - - -
deténgase con R/S

## ~ VALOR ACTUAL NETO

~ Dada una serie de flujos de caja, y una tasa i%, se puede obtener el valor actual neto de esa serie de flujos descontados según esa tasa.

i% E → NPV (DSP2)

si es NPV > 0, inversión lucrativa
NPV = 0, inversión que cumple el objetivo
NPV < 0, inversión desaconsejable

# ≡ 2ª parte ≡ Tabla de amortización

→ conocido el % (i), el pago periódico (PMT) y el monto del empréstito (PV), el programa genera una tabla de amortización entre dos periodos dados $P_1$, $P_2$ (si se desean valores para un solo periodo $P_k$, hacer $P_1 = P_2 = P_k$)

i % ↑ PMT ↑ PV f D → 0.00

$P_1$ ↑ $P_2$ → TABLA DE AMORTIZACION =
(desde $P_1$ hasta $P_2$)

| | |
|---|---|
| $P_K$ | (periodo K-ésimo) |
| INT | monto correspondiente al interés |
| PRN | " " " capital |
| BAL | saldo pendiente |

~ al final, → Σ INT (importe en concepto de intereses)
→ Σ PRN (importe en concepto de capital)

Ejemplos:

1°) Un inversionista está considerando la posibilidad de comprar un edificio por 165.000 $ ¿Que tasa de rendimiento interno obtendra? Durante 5 años va a tener los siguientes flujos de caja, despues de impuestos.

| Año | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Flujo | -10 500 | 20350 | 29700 | 38470 | 210 000 |

5 A → 5
B → 0 , 165000 CHS R/S
→ 1 , 10 500 CHS R/S
→ 2 , 20350 R/S
→ 3 , 29 700 R/S
→ 4 , 38 470 R/S
→ 5 , 210 000 R/S → 12.97 %

Si el inversionista decide no gastar nada el 1er año y cree que tendrá un flujo positivo de 13550 $ ¿cual será la nueva rentabilidad?

13550 STO 1 , C → 16.35 %

2°) Tenemos una inversión como se reseña a continuacion. Hallar su rentabilidad y trazar la curva del perfil de valor actual para i% desde 0 a 30, a intervalos de 5 en 5 % (Inversión inicial, 100 $)

| Año | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Flujo | 20 | 10 | 50 | 40 | 40 | 90 |

6 A → 6 , B → 0 , -100 R/S
→ 1 , 20 R/S
→ 2 , 10 R/S
→ 3 , 50 R/S
→ 4 , 40 R/S
→ 5 , R/S
→ 6 , 90 R/S → 25.36 % es la rentabilidad

~ para trazar la curva PVA

0 ↑ 5 D → 0 % → 150 , → 15 % → 39,50
→ 5 % → 102,72 , → 20 % → 18,05
→ 10 % → 66,47 , → 25 % → 1,08
→ 30 % → -12,52 , R/S

3°) Un inversor tiene la oportunidad de comprar una propiedad por 70 000 $. Si espera un beneficio del 13,75% y los flujos de caja despues de impuestos son como sigue, ¿debe comprar la propiedad?

| Año | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Flujo | 14000 | 11000 | 10000 | 10000 | 10000 | 9100 | 9000 | 9000 | 4500 | 71000 |

10 A → 10 , B → 0 , -70000 R/S , → 6 , 9100 R/S
→ 1 , 14000 R/S , → 7 , 9000 R/S
→ 2 , 11000 R/S , → 8 , R/S
→ 3 , 10000 R/S , → 9 , 4500 R/S
→ 4 , R/S , → 10 , 71000 R/S → 14.01 % de rentabilidad
→ 5 , R/S ,

~ vemos que, puesto que la rentabilidad es $14{,}01 > 13{,}75\%$, la inversión resulta lucrativa y excede el objetivo propuesto.

Hallemos el valor presente neto de ese conjunto de flujos de caja:

13.75 E → <u>879.93</u> , positivo como se esperaba

≡ 4º) Un inversionista desea comprar un almacen y recibe un prestamo de 100000 \$ al 9% de intereses, reembolsable en pagos anuales de 10954,65 \$. Pretende obtener una tabla de amortización para los primeros 5 años.

9 ( i% ) ↑ 10954,65 ( PMT ) ↑ 100000 ( PV ) f D → 0.00

1 ( $P_1$ ) ↑ 5 ( $P_2$ ) f E → obtenemos la siguiente tabla

| Periodo | P | 1.00 | 2.00 | 3.00 | 4.00 | 5.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Monto corresp. al interes | INT | 9000.00 | 8824.08 | 8632.33 | 8423.32 | 8195.50 |
| Monto corresp. al capital | PRN | 1954.65 | 2130.57 | 2322.32 | 2531.33 | 2759.15 |
| Saldo pendiente | BAL | 98045.35 | 95914.78 | 93592.46 | 91061.13 | 88301.99 |

y ademas 11698.01 = Σ PRN = importe pagado en concepto de capital
43075.24 = Σ INT = " " " " " intereses.

el inversionista desea conocer los datos correspondientes al periodo 15

15 ↑ f E → 15.00 | Periodo
4422.74 | Monto corresp. al interes
6531.91 | Monto corresp. al capital
42609.69 | Saldo pendiente.

R/S

5º) Dada la inversión que sigue, hallar sus <u>dos</u> rentabilidades posibles (Inversión inicial = 1500 \$)

Años 1 a 5 inclusive ≡ flujo de caja = 1000 \$
Años 6 a 10 " ≡ flujo de caja = −1000 \$

<u>trazamos el PVA</u> : 0 ↑ 5 D → resulta

| i% | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NPV | −1500 | −562.78 | −62.99 | 185.54 | 288.75 | 308.06 | 279.60 | 224.88 | 156.76 | 82.92 | 7.93 | −65.55 |

R/S

~ hay dos rentabilidades, $10 < i_1\% < 15$ y $50 < i_2\% < 55$.

- Dejemos que el programa halle la primera , C → <u>$IRR_1$ = 10.96 %</u>

- para hallar la segunda, GTOC ——— SST , SST , SST , CLX , 5 , SST , R/S → <u>$IRR_2$ = 50.53 %</u>

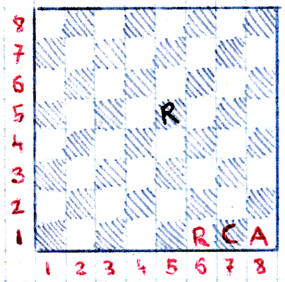
= se puede comprobar esta segunda IRR ⇒ RCD , E → $-1.10^{-6} \simeq 0$ como se esperaba.

Nota ≡ si se desean conservar los flujos de caja, grabense en una tarjeta, puesto que si se emplean las funciones AMORT los flujos se perderán.

# Mate con rey, alfil y caballo

## Ejemplo 1:

- Almacenamos posiciones iniciales




posición inicial.

rey blanco: 6.1 STO A , rey negro: 5.5 STO D

caballo blanco: 7.1 STO C , nº jugadas: 35 STO I

alfil blanco: 8.1 STO B

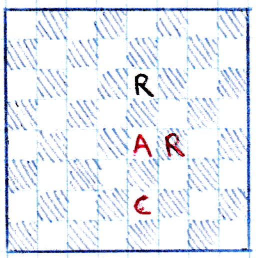
— Acorralamos al rey negro

(1) 5.2 A → 4.4
(2) 6.3 B → 5.5
(3) 5.3 A → 6.5
(4) 5.2 C → 5.5
(5) 5.4 B → 6.6
(6) 6.4 A → 5.6

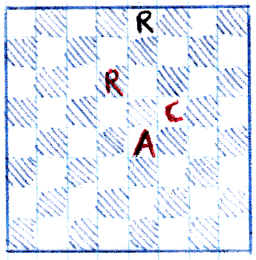
(7) 7.3 C → 4.6
(8) 6.5 A → 5.7
(9) 5.5 A → 4.7
(10) 6.5 C → 5.8
(11) 5.6 A → 4.8
(12) 4.6 A → 5.8

(13) 4.5 B → 4.8
(14) 3.6 B → 3.8
(15) 5.7 C → 4.8
(16) 4.5 C → 3.8
(17) 5.7 A → 2.8
(18) 2.5 B → 3.8

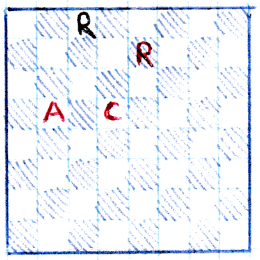
(19) 1.6 B → 2.8
(20) 4.7 A → 1.7
(21) 2.5 B → 2.7
(22) 4.8 A → 2.8
(23) 2.6 C → 2.7
(24) 3.8 C → 2.8



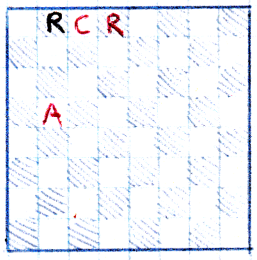
posición después de (6)



posición después de (12)



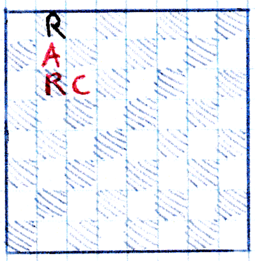
posición después de (18)



posición después de (24)

(25) 1.6 B → 1.8
(26) 4.7 A → 2.8
(27) 3.6 A → 1.8
(28) 2.6 A → 2.8
(29) 5.7 C → 1.8
(30) 2.7 B → 2.8
(31) 3.6 C → 0.00 jaque mate

~ en resumen, se dio jaque mate al rey negro en 31 jugadas



posición después de (31)

# Sistemas tridiagonales N×N ($N \leq 12$)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | R/S | STO÷(i) | STO−(i) | R/S | ÷ | STO(i) | RCI | LBL E |
| STO 0 | STO E | RCL D | x⇄y | STO D | DSZ | GTO 8 | 2 | 0 |
| 1 | R/S | x⇄y | RCL D | R/S | DSZ | LBL 9 | × | STI |
| R/S | STO D | ÷ | STO÷(i) | STO E | RCL(i) | DSZ | STI | LBL 6 |
| STO E | R/S | STO D | DSZ | R/S | − | RCL(i) | RCL(i) | ISZ |
| R/S | ISZ | DSZ | STO÷(i) | RCL D | STO E | × | RCI | RCL(i) |
| STO 1 | STO(i) | DSZ | ISZ | x≷y | ISZ | ISZ | 2 | −x− |
| R/S | R/S | RCL D | RCL 0 | ISZ | RCL(i) | STO−(i) | ÷ | ISZ |
| STO 2 | ISZ | RCL(i) | RCI | STO(i) | ISZ | RCL(i) | STI | RCL 0 |
| RCL E | STO(i) | − | 2 | R↓ | STO−(i) | LBL 8 | R↓ | x≠y |
| STO÷ 1 | RCL E | STO D | ÷ | x=0 | LBL 1 | DSZ | STO(i) | GTO 6 |
| STO÷ 2 | x=0 | ISZ | 1 | GTO 1 | RCL E | DSZ | R↑ | CLX |
| 2 | GTO 1 | RCL(i) | + | STO÷(i) | STO÷(i) | GTO 9 | RCL 0 | RTN |
| STI | STO÷(i) | ISZ | x≠y | RCL E | RCL(i) | LBL 7 | x>y | |
| LBL 0 | DSZ | ISZ | GTO 0 | x≷y | ISZ | ISZ | GTO 7 | |
| 15 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 | 105 | 120 | 133 |

## Status

- FIX 2
- DEG

Libres LBL 2, 3, 4, 5, B, C, D, a, b, c, d, e

- todas las memorias ocupadas

## Características

Resuelve cualquier sistema de la forma: (sistema tridiagonal N×N)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$
$$a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = c_3$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$a_{ij}x_{m-2} + a_{ij+1}x_{m-1} + a_{ij+2}x_m = c_{m-1}$$
$$a_{mj+1}x_{m-1} + a_{mj+2}x_m = c_m$$

que tenga $N \leq 12$ ecuaciones en $x_1, x_2, \cdots x_N$, previsto que tenga solución única.

## Utilización

- Introducir número de ecuaciones, N A → 1.00 (ahora, introducir $a_{11}$, etc)
- introducir coeficientes, de izquierda a derecha y de arriba abajo, utilizando R/S después del último, seguirá un periodo de cálculo, y se obtendrá finalmente $x_1, x_2, \cdots x_N$.
- para revisar la solución calculada: E → $x_1$, $x_2$, ⋯ $x_N$

## Ejemplo

Hallar una solución aproximada de $y'' + y = x^5 + 20x^3$, con $y(1) = 1$, $y(2) = 32$

- adoptamos una solución por diferencias finitas, tomamos los puntos intermedios, y tendremos: ($h = 0{,}1$)

$y''_j + y_j = x_j^5 + 20x_j^3$, y como es $y''_j \simeq \frac{1}{h^2}(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})$, sustituyendo

queda $y_{j-1} + (h^2-2)y_j + y_{j+1} = h^2(x_j^5 + 20x_j^3)$, que teniendo en cuenta $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $x_{10} = 2$, $y_{10} = 32$

se desarrolla en:

9 ec.

$$\left\{\begin{array}{l}
(h^2-2)y_1 + y_2 = h^2(x_1^5 + 20x_1^3) - 1 = -0'7176949 \\
y_1 + (h^2-2)y_2 + y_3 = h^2(x_2^5 + 20x_2^3) = 0{,}3704832 \\
y_2 + (h^2-2)y_3 + y_4 = h^2(x_3^5 + 20x_3^3) = 0{,}4765293 \\
y_3 + (h^2-2)y_4 + y_5 = h^2(x_4^5 + 20x_4^3) = 0{,}6025824 \\
y_4 + (h^2-2)y_5 + y_6 = h^2(x_5^5 + 20x_5^3) = 0{,}7509375 \\
y_5 + (h^2-2)y_6 + y_7 = h^2(x_6^5 + 20x_6^3) = 0{,}9240576 \\
y_6 + (h^2-2)y_7 + y_8 = h^2(x_7^5 + 20x_7^3) = 1'1245857 \\
y_7 + (h^2-2)y_8 + y_9 = h^2(x_8^5 + 20x_8^3) = 1'3553568 \\
y_8 + (h^2-2)y_9 = h^2(x_9^5 + 20x_9^3) - 32 = -30{,}3805901
\end{array}\right.$$

$y(x_1) = 1'617334806$
$y(x_2) = 2'500801363$
$y(x_3) = 3'729743107$
$y(x_4) = 5'397916721$
$y(x_5) = 7'614693568$
$y(x_6) = 10'50626098$
$y(x_7) = 14{,}21682338$
$y(x_8) = 18{,}90980325$
$y(x_9) = 24{,}76904188$

$x_i = x_0 + hi = 1 + 0'1i$, $y_i = y(x_i)$

# Cálculo de integrales dobles $\int_{x_0}^{x_m}\int_{y_0}^{y_m} f(x,y)\,dy\,dx$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| LBL B | RCL A | RCL 5 | STO × 6 | STO 7 | RCL 3 |
| STO B | ÷ | × | RCL D | LBL 3 | P⇄S |
| R↓ | STO C | RCL 1 | STO × 6 | RCL 9 | GSB E |
| STO A | RCL 0 | + | 9 | RCL 3 | P⇄S |
| RTN | RCL 1 | GSB D | STO ÷ 6 | RCL C | STO + 4 |
| LBL A | − | 6 | RCL 6 | RC I | RCL 4 |
| P⇄S | RCL B | RCL E | P⇄S | × | RTN |
| STO 0 | ÷ | − | RTN | + | LBL E |
| R↓ | STO D | STO E | LBL D | P⇄S | RTN |
| STO 1 | RCL B | × | STO 9 | GSB E | |
| R↓ | STO 5 | STO + 6 | RCL A | P⇄S | |
| STO 2 | 1 | 1 | ST I | 6 | |
| R↓ | STO − 5 | STO − 5 | DSZ | RCL 7 | |
| STO 3 | RCL 0 | RCL 5 | RCL 9 | − | |
| P⇄S | GSB D | x≠0 | RCL 2 | STO 7 | |
| LBL a | STO 6 | GTO 1 | P⇄S | × | |
| P⇄S | 2 | RCL 1 | GSB E | STO + 4 | |
| RCL 2 | STO E | GSB D | P⇄S | DSZ | |
| RCL 3 | LBL 1 | STO + 6 | STO 4 | GTO 3 | |
| − | RCL D | RCL C | 2 | RCL 9 | |
| 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 109 |

**características**

- 109 pasos
- 16 memorias ocupadas: $R_{S0}-R_{S9}$, A - I
  $R_0$ a $R_9$ inclusive, libres

**status**

- CF0, CF1, CF2, CF3
- DSP 5, FIX, RAD
- utiliza etiquetas A, B, E, a, 1, 3

**Etiquetas**

A ≡ introducir los límites → integral

$x_0 \uparrow x_m \uparrow y_0 \uparrow y_m$ A → ∬

fA ≡ cálculo de la integral sin reintroducir los límites: fA → ∬

B ≡ introducción de m, n: m↑n B → m

E ≡ definición de f(x,y) ó cálculo de f(x,y)

CALCULO DE INTEGRALES DOBLES $\int_{x_0}^{x_m}\int_{y_0}^{y_m} f(x,y)\,dy\,dx$ (R0 - R9)

→∬

$x_0 \uparrow x_m \uparrow y_0 \uparrow y_m$ → ∬ | m↑n → | y↑x → f(x,y)

**Utilización**

a) - está basado en el siguiente método, válido para P(x,y) hasta 3er grado en x e y, o menos.

$$\int_{x_0}^{x_m}\int_{y_0}^{y_m} f(x,y)\,dy\,dx = \frac{hk}{9}\Big[(f_{00}+4f_{10}+2f_{20}+\cdots+f_{m0}) + 4(f_{01}+4f_{11}+2f_{21}+\cdots+f_{m1}) + 2(f_{02}+4f_{12}+2f_{22}+\cdots+f_{m2}) + \cdots + (f_{0n}+4f_{1n}+2f_{2n}+\cdots+f_{mn})\Big] + \text{error}$$

donde $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, siendo

$x_r = x_0 + rh$, $h = (x_m - x_0)/m$

$y_s = y_0 + sk$, $k = (y_m - y_0)/n$

| | |
|---|---|
| S0 | $y_m$ |
| S1 | $y_0$ |
| S2 | $x_m$ |
| S3 | $x_0$ |
| S4 | Σ |
| S5 | contador |
| S6 | ΣΣ = ∬ |
| S7 | 4, 2, ... |
| S8 | - |
| S9 | $y_s$ |
| A | m |
| B | n |
| C | h |
| D | k |
| E | 4, 2, ... |
| I | contador |

- debe ser $m = \dot{2}$ y $n = \dot{2}$ necesariamente. En caso contrario, el programa no se detendrá
- da $(m+1)(n+1)$ pasadas a f(x,y), así que los tiempos de ejecución pueden ser grandes
- los registros primarios R0 a R9 inclusive están a disposición del usuario y pueden ser utilizados en la definición de f(x,y)
- el programa no altera R0 - R9, ni tampoco $x_0$, $x_m$, $y_0$, $y_m$, m, n. Véase contenidos
- una vez calculada, la integral queda almacenada en S6
- f(x,y) se define o calcula con y en Y, x en X
- caso de ser detenido el programa, verifíquese un posible intercambio P⇄S antes de continuar.

b) - 1) defínase $f(x,y)$, con $x$ en $X$ e $y$ en $Y$ $\Rightarrow$ GTO E, , $f(x,y)$, RTN,

- 2) introducir $n, m$ ($n = 2$, $m = 2$) $\Rightarrow$ $n \uparrow m$ B $\rightarrow$ $m$ (si se desea $n = m$, $\Rightarrow$ $m \uparrow$ B $\rightarrow$ $m$)

- 3) introducir límites y calcular $\iint$ $\Rightarrow$ $x_0 \uparrow x_n \uparrow y_0 \uparrow y_m$ A $\rightarrow$ $\iint$

- 4) si se desea, repetir 3 para límites cualesquiera, $n, m$ los de antes. Para cambiar $n, m$, ir al paso 2. Si se desea cambiar $n, m$, pero no los límites, ir al paso 2, y después $f$A $\rightarrow \iint$. Para calcular $f(x,y)$ para cualquier valor $\Rightarrow$ $y \uparrow x$ E $\rightarrow f(x,y)$. Repetir si se desea

## Ejemplos

1) Calcular $\int_0^1 \int_1^2 (x^2+y^2)\, dy\, dx$

- GTO E, , $x^2$, $x \gtrless y$, $x^2$, +, RTN,
- $n = m = 2$ $\Rightarrow$ $2 \uparrow$ B $\rightarrow$ 2.00000
- $0 \uparrow 1 \uparrow 1 \uparrow 2$ A $\Rightarrow$ $\iint = \underline{\underline{2.6666\ 66667}}$ que es exacto, por ser $f(x,y) \equiv P(x,y)$ de grado 2

2) Calcular $\int_{-2,3}^{1'6} \int_{3'9}^{6'1} (e^{-x^2} + x^3 - y^3x^2 + 7) . \operatorname{arctg}(x-2) . \operatorname{sen}(y+3)\, dy\, dx$

- GTO E, , STO 9, $x^2$, CHS, $e^x$, 7, +, RCL 9, 3, $y^x$, +, $x \gtrless y$, STO 8, 3, $y^x$, RCL 9, $x^2$, $\times$, $-$, RCL 9, 2, $-$, $\text{TAN}^{-1}$, $\times$, RCL 8, 3, +, SIN, $\times$, RTN,
- $n = m = 2$ $\Rightarrow$ $2 \uparrow$ B $\rightarrow$ 2
- 2,3 CHS $\uparrow$ 1'6 $\uparrow$ 3'9 $\uparrow$ 6'1 A $\Rightarrow$ $\iint \simeq \underline{1200.196607}$, cuya precisión ignoramos
- repetimos con $n = m = 4$ $\Rightarrow$ $4 \uparrow$ B $\rightarrow$ 4, $f$A $\Rightarrow$ $\iint \simeq \underline{1308.089901}$
- repitiendo con diversos valores de $n = m$, obtenemos

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $n = m = 2 \rightarrow$ | 1200.196607 | |
| | $= 4 \rightarrow$ | 1308.089901 | $\Delta_1 = 107{,}89$ |
| | $= 8 \rightarrow$ | 1320.484533 | $\Delta_2 = 12{,}395$ |
| | $= 16 \rightarrow$ | 1321.235310 | $\Delta_3 = 0{,}751$ |
| (este último valor llevó ~ 2 horas) | $= 32 \rightarrow$ | 1321.273409 | $\Delta_4 = 0{,}0381$ |

podemos suponer $\Delta_5 \simeq \frac{1}{20} \Delta_4 = 0{,}0019$ con lo cual, tomamos como valor más probable

$I \simeq \underline{\underline{1321.275}}$

3) Calcular $\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2}$

- procediendo como antes, y considerando que el valor exacto es $\ln 25/24 = 0.040821995$ obtenemos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n = m = 2 \rightarrow$ | 0.040827842 | , error | $= 5{,}84727 \cdot 10^{-6}$ |
| $= 4 \rightarrow$ | 0.040822374 | , error | $= 3{,}7936 \cdot 10^{-7}$ |
| $= 6 \rightarrow$ | 0.040822070 | , error | $= 7{,}526 \cdot 10^{-8}$ |
| $= 8 \rightarrow$ | 0.040822019 | , error | $= 2{,}367 \cdot 10^{-8}$ |
| $= 10 \rightarrow$ | 0.040822004 | , error | $= 9{,}53 \cdot 10^{-9}$ |
| $= 12 \rightarrow$ | 0.040821999 | , error | $= 4{,}44 \cdot 10^{-9}$ |
| $= 14 \rightarrow$ | 0.040821997 | , error | $= 2{,}26 \cdot 10^{-9}$ |

- así, tomamos $I = \underline{0.040821997}$

# Inversa de una matriz N×N , N ≤ 5

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | R/S | LBL 6 | x⇄y | x≠0 | LBL 6 | GTO 6 | RTN | LAST X |
| EEX | F0? | 1 | ENTER↑ | GTO 2 | R↓ | 1 | LBL 6 | FRAC |
| CHS | STO(i) | − | GSB 0 | GSB c | R↓ | − | CF1 | × |
| 4 | ISZ | x≠0 | RCL(i) | ENTER↑ | LBL 5 | $10^x$ | ENTER↑ | 1 |
| × | DSZ | GTO 7 | ÷ | GSB 0 | SF1 | RC I | CHS | 0 |
| ST I | GTO 1 | RTN | GSB b | RCL(i) | GSB b | × | $10^x$ | × |
| RTN | CLX | LBL C | GSB c | 1/x | x≠0 | FRAC | CHS | + |
| LBL D | RTN | SF2 | GSB 0 | STO(i) | GTO 3 | 1 | RC I | RC I |
| SF0 | LBL B | GSB c | RCL(i) | LAST X | GSB c | 0 | + | FRAC |
| GTO 5 | GSB d | GSB d | × | ENTER↑ | RTN | × | ST I | + |
| LBL E | LBL 7 | SF2 | GSB b | LBL 3 | LBL a | INT | R↓ | ST I |
| CF0 | SF2 | GSB a | GSB a | R↓ | 1 | RTN | GTO e | R↓ |
| LBL 5 | GSB c | SF2 | GSB 0 | GSB c | GTO e | LBL 5 | LBL 0 | RTN |
| GSB d | ENTER↑ | GSB b | STO−(i) | GSB b | LBL b | ENTER↑ | 1 | |
| $x^2$ | ENTER↑ | LBL 2 | LBL 6 | x=y | 2 | GSB e | 0 | |
| RC I | GSB 0 | GSB b | SF1 | GTO 6 | GTO e | R↑ | ÷ | |
| FRAC | RCL(i) | GSB c | GSB b | GSB 0 | LBL c | − | + | |
| + | x≠0 | x=y | x≠0 | STO÷(i) | 3 | CHS | 1 | |
| ST I | GTO 5 | GTO 6 | GTO 2 | CHS | GTO e | x⇄y | • | |
| LBL 1 | x⇄y | ENTER↑ | LBL 5 | GSB b | LBL d | $10^x$ | 1 | |
| DSZ | −x− | GSB a | GSB d | GSB c | 4 | ÷ | − | |
| LBL 1 | GTO 6 | x=y | SF2 | GSB 0 | LBL e | RC I | GSB d | |
| RCL(i) | LBL 5 | GTO 5 | GSB b | STO÷(i) | F2? | + | x⇄y | |
| F0? | R↓ | GSB 0 | SF1 | CHS | GTO 5 | ST I | INT | |
| x⇄y | GSB C | RCL(i) | GSB a | GTO 5 | F1? | R↑ | x⇄y | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 213 |

## Características

- 213 pasos
- todas las memorias

## Status

- FIX 4, DEG,
- CF0, 1, 2, 3
- libres LBL 4, 8, 9

## tiempos (de cálculo)

N = 1 , 39 sg

N = 2 , 3 min

N = 3 , 9' 20''

N = 4 , 22'

N = 5 , 45'

| INVERSA DE UNA MATRIZ NXN (N ≤ 5) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| N → INIC. | → $A^{-1}$ | INTERCAMBIO | INPUT A | SALIDA A |

## Características

– dado que utiliza hasta 25 registros para almacenar la matriz, únicamente $R_I$ queda disponible para las operaciones de manejo de datos en funciones de índice, lo cual engrandece el tiempo de ejecución.

## Utilización

- introducir la dimensión de la matriz ⇒ N A → 0.000N
- introducir la matriz N×N ⇒ D → $N^2$.000N , $a_{11}$ R/S $a_{12}$ R/S , . . . , $a_{mm}$ R/S → 0.0000
- calcular la inversa ⇒ B → 0.0000 (ver advertencias)
- recuperar la matriz inversa ⇒ E → $a^*_{11}$ R/S → $a^*_{12}$ R/S ; . . . , R/S → $a^*_{mm}$ , R/S → 0.0000

## Ejemplos

$$\begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 0.2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1.3226 & -0.8710 & -0.1935 \\ -0.8710 & 0.4516 & 0.3226 \\ 0.1613 & 0.0645 & -0.0968 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 11 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & -9 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 70 & -1 & 7 & -71 \\ -252 & 4 & -25 & 255 \\ 121 & -2 & 12 & -122 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 7 & 1 \\ 6 & 9 & 9 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 9 & 7 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} -0.1078 & 0.1852 & -0.0164 & 0.6781 & -0.4227 \\ 0.0516 & -0.1320 & 0.1383 & -0.7156 & 0.4195 \\ 0.0052 & 0.1432 & -0.1224 & 0.2813 & -0.1849 \\ 0.1776 & -0.0659 & -0.0237 & 0.0906 & -0.0549 \\ -0.1984 & -0.0070 & 0.0133 & -0.2156 & 0.2945 \end{vmatrix}$$

## Advertencias

- $A^{-1}$ reemplaza a A en los registros.
- cuando un intercambio no puede ser efectuado por división por cero, aparecerá en pantalla, y deberá efectuarse luego.

# Ajedrez: mate con rey, alfil y caballo

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL A | 1 | LBL 3 | 1 | RC I | LBL c | GSB C | 2 |
| DSP 1 | 1 | GSB D | 2 | 7 | 3 | GSB e | GSB E |
| 0 | x≠y | 1 | x=y | $10^x$ | 1 | GSB D | RTN |
| ST I | GTO 3 | 1 | GTO 0 | ÷ | 3 | GTO 5 | LBL D |
| R↓ | LBL 1 | x=y | LBL d | − | CHS | LBL b | 2 |
| 3 | GSB C | GTO 4 | GSB e | RTN | GSB E | GSB C | 5 |
| 1 | GSB D | GSB C | 1 | LBL 9 | 1 | GSB B | 2 |
| x=y | LBL 2 | GTO 2 | 2 | 2 | 4 | GSB e | GSB E |
| GTO c | 3 | LBL 6 | x=y | 2 | 2 | GSB D | RTN |
| 1 | 2 | GSB e | GTO 8 | x≠y | GSB E | GTO 5 | LBL E |
| 4 | 2 | 1 | GTO 3 | GTO b | 1 | LBL e | x<0 |
| 2 | CHS | 1 | LBL 4 | 1 | 1 | 3 | SF 2 |
| GSB E | GSB E | x=y | GSB C | 4 | x=y | 3 | ISZ |
| 1 | 2 | GTO 1 | LBL 5 | 1 | GTO d | 1 | RC I |
| 1 | 3 | LBL 8 | 2 | GSB E | GTO 0 | GSB E | 1 |
| x≥y | 3 | GSB C | 3 | 1 | LBL a | RTN | 0 |
| x≠y | CHS | GSB D | 3 | 1 | 2 | LBL B | ÷ |
| GTO 7 | DSP 9 | GTO 5 | CHS | x≥y | 1 | 3 | F2? |
| GSB B | ISZ | LBL 7 | GSB E | x≠y | x≠y | 1 | CHS |
| 1 | RC I | 2 | 3 | GTO a | GTO b | 3 | + |
| 2 | 7 | 1 | 2 | GSB C | GSB B | GSB E | R/S |
| x≠y | $10^x$ | x≥y | 2 | GSB D | 1 | RTN | RTN |
| GTO 6 | ÷ | x≠y | CHS | GSB B | 2 | LBL C | |
| LBL 0 | − | GTO 9 | DSP 9 | GSB e | x=y | 1 | |
| GSB e | RTN | GSB B | ISZ | GTO 2 | GTO 0 | 3 | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 197 |

## características

- 197 pasos
- todas las LBL utilizadas
- sólo $R_I$ utilizado

## status

- FIX 1, DEG, CF0, 1, 2, 3

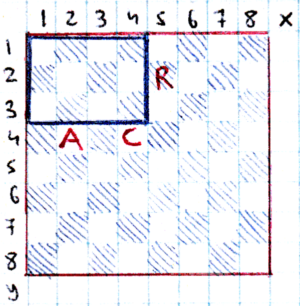
## tiempos

- muy cortos, menos de 3 segundos por movimiento

MATE CON REY, ALFIL Y CABALLO

XY → START

## Explicación del juego




= La calculadora conduce las 3 piezas blancas, alfil, caballo y rey, y el usuario el rey negro. Se parte de la posición inicial que se observa en el diagrama, donde el rey negro puede ser colocado arbitrariamente por el usuario en cualquier posición legal dentro del recuadro marcado en azul (esto es, en una de las 5 casillas 11, 12, 21, 22, 31).

El objetivo del juego es, para la calculadora, dar mate al rey negro en un máximo de 8 movimientos, a partir de la posición inicial indicada.

## Notación de movimientos

- el usuario introducirá la posición como la xy de la casilla a la cual va a pasar el rey negro.
- las blancas replican en DSP 1, según el siguiente convenio:

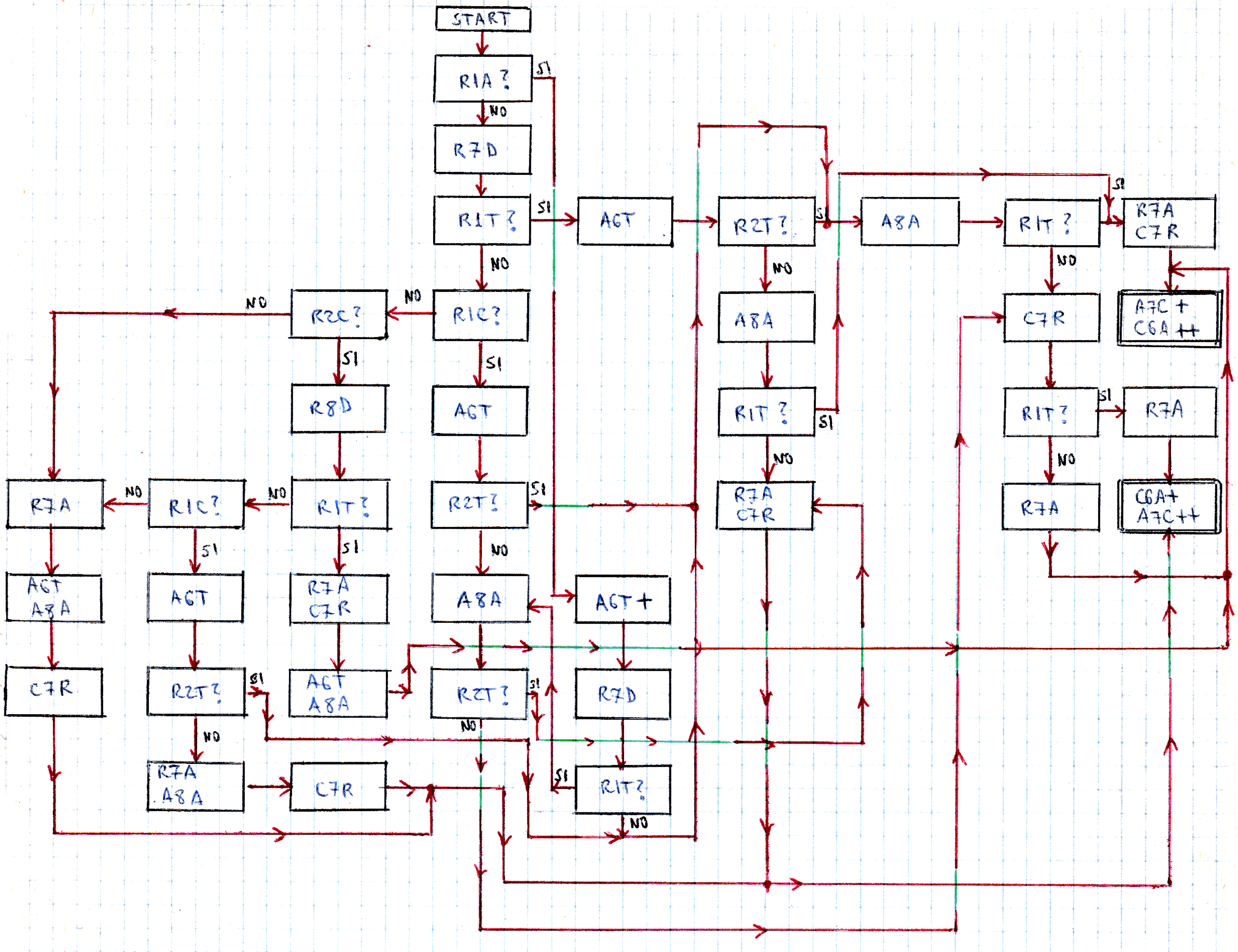
a x y . n , donde
- a = código de identificación de la pieza movida
  - 1 = rey
  - 2 = caballo
  - 3 = alfil
- x =, y = } coordenadas de la nueva posición
- n = nº de jugadas empleadas hasta el momento

- la respuesta blanca precedida de signo − indica jaque
- la respuesta en DSP 9, con signo −, de la forma axy.000000n indica jaque mate

## Observaciones

- el programa no detecta movimientos ilegales.
- un error durante el juego no puede ser corregido

## Diagrama de flujo

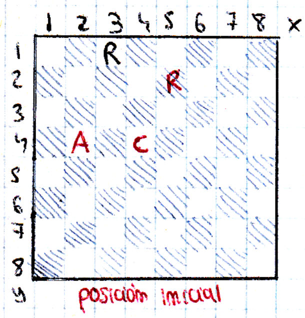



## Utilización y ejemplo

- introducir posición inicial : xy A → 1ª jugada de las blancas
- introducir sucesivos movimientos: xy R/S → sucesivas jugadas , hasta acabar en jaque mate
- para otro juego , repetir el proceso.

### Ejemplo

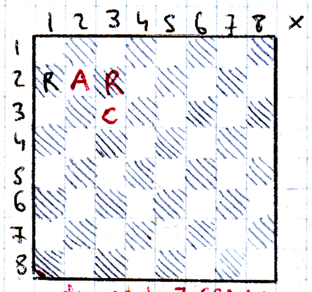
- introducimos posición inicial




posición inicial

31 A → -313.1 (= 1. A6T +)
21 R/S → 142.2 (= 2. R7D )
12 R/S → 331.3 (= 3. A8A )
11 R/S → 132.4 (= 4. R7A )
12 R/S → 252.5 (= 5. C7R )
11 R/S → -322.6 (= 6. A2C+)
12 R/S → -233.0000007 (= 7. C6A++)

} el juego ha terminado




después de 7.C6A++

= el rey negro ha sufrido mate en 7 jugadas

# Series de Fourier – Análisis armónico – Datos discretos

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | LBL A | F0 ? | P≷S | 1 | PSE | × | R↑ | 1 | LBL a |
| – | CF0 | CHS | STO+(i) | ST I | GSB E | x≷y | RTN | – | CF2 |
| – | CF2 | F0 ? | P≷S | LBL 3 | DSP 0 | −x− | SIN | LBL 8 | DSP 0 | SF0 |
| – | RAD | GTO 7 | DSZ | DSP 0 | RCL 0 | P≷S | LAST X | PSE | 1 |
| 5 | CLREG | RCL C | GTO 1 | PSE | RCL C | RCL(i) | ST I | DSP 4 | STO+0 |
| – | P≷S | × | RCL A | DSP 4 | × | P≷S | R↑ | R↓ | GTO 0 |
| – | CLREG | R/S | P≷S | RCL(i) | RCL A | × | RCL 0 | RCL(i) | LBL e |
| – | STO E | RCL E | STO+0 | RND | + | + | π | $x^2$ | STO B |
| – | STO 0 | ÷ | P≷S | −x− | GTO 4 | + | × | P≷S | RTN |
| 10 | DSZ(i) | 2 | F2 ? | P≷S | LBL E | DSZ | COS | RCL(i) | LBL c |
| – | 2 | × | GTO B | RCL(i) | RCL C | GTO 5 | RCL(i) | P≷S | CF1 |
| – | x≷y | LBL 7 | 1 | P≷S | ÷ | P≷S | × | $x^2$ | RCL E |
| – | ÷ | STO A | F0 ? | RND | STO 0 | RCL 0 | 2 | + | 2 |
| – | π | RCL B | CLX | −x− | RCL B | P≷S | ÷ | RCL E | ÷ |
| 15 | × | ST I | F0 ? | ISZ | ST I | 2 | − | × | ENTER↑ |
| – | STO D | LBL 1 | CF0 | RCL B | 0 | ÷ | RTN | 2 | INT |
| – | R↓ | RCL 0 | STO−0 | RC I | LBL 5 | + | LBL C | F3 ? | x≠y |
| – | STO C | RCL D | GTO 0 | x≤y | RC I | F1 ? | SF3 | $x^2$ | SF1 |
| – | GSB c | × | LBL B | GTO 3 | RCL 0 | RTN | F1 ? | ÷ | 9 |
| 20 | LBL 0 | RC I | P≷S | CLX | × | RCL E | CF3 | + | x≷y |
| – | RCL 0 | × | RCL 0 | RTN | RCL D | 2 | RCL B | −x− | x>y |
| – | x=0 | RCL A | P≷S | LBL D | × | RCL B | ST I | DSZ | x≷y |
| – | SF2 | P→R | DSP 4 | STO A | ENTER↑ | × | 0 | GTO 6 | STO B |
| – | F0 ? | STO+(i) | RND | x≷y | COS | x=y | LBL 6 | CLX | RTN |
| 25 | RCL A | x≷y | −x− | LBL 4 | RCL(i) | GTO 8 | RC I | RTN | |
| | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 224 |

**características**

- 224 pasos
- todas las memorias
- libres LBL 2, 9, b, d,

**status**

- FIX 4, RAD
- CF0, 1, 2, 3

**tiempos**

- en CALCULO:

  2 seg. por cada armónico

- en EVALUACIÓN

  3 seg. por armónico

| SERIES DE FOURIER – ANÁLISIS ARMÓNICO – DATOS DISCRETOS (MAX 9 ARM.) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| DELETE | | REPOSICIÓN | | # ARM. $\hat{y}$ |
| h, N → INPUT | REVIEW → $a_k, b_k$ | → $S_{MIN\,K}$ | $x_0 \uparrow \Delta \to x_i; \hat{y}_i$ | $x \to \hat{y}$ |

## Teoría

- se distinguen 2 casos: ($N$ = nº de datos)

### a) $N = 2L+1$

tenemos un nº impar de argumentos $N = 2L+1$, $x = 0, 1, 2, \ldots, 2L$

$$a_k = \frac{2}{2L+1} \sum_{x=0}^{2L} y(x) \cos \frac{2\pi}{2L+1} kx \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, L$$

$$b_k = \frac{2}{2L+1} \sum_{x=0}^{2L} y(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2L+1} kx \quad , \quad k = 1, 2, \ldots L$$

$$\hat{y}(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{L} \left( a_k \cos \frac{2\pi}{2L+1} kx + b_k \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2L+1} kx \right)$$

$$S_{MIN\;K} = \sum_{k=M+1}^{L} (a_k^2 + b_k^2) \cdot \frac{2L+1}{2}$$

### b) $N = 2L$

tenemos un nº impar de argumentos $N = 2L$, $x = 0, 1, 2, \ldots 2L-1$

$$a_k = \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{2L-1} y(x) \cos \frac{\pi}{L} kx \quad , \quad k = 0, 1, \ldots, L$$

$$b_k = \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{2L-1} y(x) \operatorname{sen} \frac{\pi}{L} kx \quad , \quad k = 1, 2, \ldots L-1$$

$$\hat{y}(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{L-1} \left( a_k \cos \frac{\pi}{L} kx + b_k \operatorname{sen} \frac{\pi}{L} kx \right) + \frac{1}{2} a_L \cos \pi x$$

y similarmente para $S_{MINIMA}$.

## Características y utilización

| PRIM | | SEC. | |
|---|---|---|---|
| 0 | usado, x | 0 | $a_0$ |
| 1 | $a_1$ | 1 | $b_1$ |
| 2 | $a_2$ | 2 | $b_2$ |
| 3 | $a_3$ | 3 | $b_3$ |
| 4 | $a_4$ | 4 | $b_4$ |
| 5 | $a_5$ | 5 | $b_5$ |
| 6 | $a_6$ | 6 | $b_6$ |
| 7 | $a_7$ | 7 | $b_7$ |
| 8 | $a_8$ | 8 | $b_8$ |
| 9 | $a_9$ | 9 | $b_9$ |
| A | $\Delta$ | | |
| B | # arm. | | |
| C | h | | |
| D | $2\pi/N$ | | |
| E | N | | |
| I | usado, k | | |

- el programa no se limita sólo a argumentos $x = 0, 1, 2, \ldots, N$, sino a argumentos de la forma general $x = 0, h, 2h, 3h, \ldots, Nh$
- el programa calcula y almacena hasta un máximo de 9 armónicos $(a_k, b_k)$ además de $a_0$ (doble del valor medio)
- para $N \leq 19$, la $\hat{y}$ se colocará en los N puntos-datos, y se obtendrá una representación exacta de los datos. Si $N > 19$, se calcularán 9 armónicos, y se obtendrá una representación de mínimos cuadrados de hasta 9 armónicos.
- también es posible calcular $S_{MIN\,K} = \sum_{x=0}^{x=Nh} (y - \hat{y}_K)^2$ si $N \leq 19$. Para $N > 19$, se obtendrá $S_{MIN\,K} - A$ donde $A$ = cte positiva desconocida.
- el programa puede calcular $\hat{y}$ con cualquier nº de armónicos $\leq 9$
- cualquier error en la introducción de $y(x)$ puede ser corregido, excepto $y(0)$
- subrutinas de evaluación automática, manual, revisión de armónicos, etc, están disponibles. El programa utiliza radianes.

### LBL A ≡ introducción de datos y cálculo de armónicos

- tenemos N datos $y(x)$, para $x = 0, h, 2h, \ldots (N-1)h$.

$h \uparrow N$ $\boxed{A} \rightarrow x_{N-1}$

$y(x_{N-1})$ $\boxed{R/S} \rightarrow x_{N-2}$

- - - - - - - - - -

$y(x_1)$ $\boxed{R/S} \rightarrow 0$

$y(0)$ $\boxed{R/S} \rightarrow a_0$

$\rightarrow 1 \rightarrow a_1 \rightarrow b_1$

$\rightarrow 2 \rightarrow a_2 \rightarrow b_2$

- - - - -

$\rightarrow k \rightarrow a_k \rightarrow b_k \rightarrow 0.0000$

Límites
- N puede ser cualquier entero $> 1$ ; $h \neq 0$
- se calcularán un máximo de 9 armónicos. Para $N \leq 19$, se calculan $INT\left(\frac{N}{2}\right)$ armónicos.
- $a_0$ es el doble del valor medio. Las $a_k, b_k$ se muestran redondeados a 4 decimales, para evitar presentaciones inadecuadas de armónicos teóricamente nulos. Sin embargo, quedan almacenados con todas sus cifras.

### LBL a ≡ corrección de errores

según ejemplo,

- - - - - - -

$y(x_K)$ $\boxed{R/S} \longrightarrow x_{K-1}$

Error $\rightarrow y(x_{K-1})$ $\boxed{R/S} \longrightarrow x_{K-2}$

$f\,A \rightarrow x_{K-1}$

correcto $\rightarrow y(x_{K-1})$ $\boxed{R/S} \rightarrow x_{K-2}$, etc.

Límites
- corrige cualquier $y(x)$ errónea cualquier nº de veces, excepto $y(0)$ puesto que una vez introducida $y(0)$ se muestran las $a_k, b_k$.

~ LBL B ≡ revisión de armónicos

en cualquier momento, previsto que el nº correcto de armónicos esté especificado, presentará:

$$\boxed{B} \rightarrow a_0$$
$$\rightarrow 1 \rightarrow a_1 \rightarrow b_1$$
$$\rightarrow 2 \rightarrow a_2 \rightarrow b_2$$
$$\cdots$$
$$\rightarrow K \rightarrow a_K \rightarrow b_K \rightarrow 0.0000$$

límites
- máximo, 9 armónicos + $a_0$
- se presentan redondeados a 4 decimales
- depende del nº de armónicos especificado.

~ LBL C ≡ calculo de las $S_{MIN}$

supuesto que $N \leq 19$, y el nº correcto de armónicos está especificado, presenta

$$\boxed{C} \rightarrow K \rightarrow S_K$$
$$\rightarrow K-1 \rightarrow S_{K-1}$$
$$\cdots$$
$$\rightarrow 0 \rightarrow S_{MIN\,0} \rightarrow 0.0000$$

límites
- las $S_{MIN}$ solo son correctas si $N \leq 19$. Debe estar correcto el nº de armónicos $INT(\frac{N}{2})$
- sirven para elegir que nº de armónicos es adecuado para $\hat{y}$
- el error $RMS_K = \sqrt{S_{MIN\,K}/N}$

~ LBL E ≡ evaluación $x \rightarrow \hat{y}(x)$

- especificado un nº de armónicos determinado (en caso CONTRARIO, $INT(\frac{N}{2})$ ó 9) calcula la $\hat{y}(x)$ para un $x$ dado

$$x\ \boxed{E} \rightarrow \hat{y}(x)$$

límites
- se calcula con un máximo de 9 armónicos. Si $N \leq 19$, se obtiene colocación en los N datos. En caso contrario, aproximación de mínimos cuadrados.
- puede calcular $\hat{y}(x)$ con K armónicos ( $1 \leq K \leq INT(\frac{N}{2})$ ó 9 )

~ LBL D ≡ evaluación automática

- calcula automáticamente $\hat{y}(x)$ para $x = x_0, x_0+\Delta, x_0+2\Delta, \ldots$

$$x_0 \uparrow \Delta\ \boxed{D} \rightarrow x_0 \rightarrow \hat{y}(x_0)$$
$$\rightarrow x_0+\Delta \rightarrow \hat{y}(x_0+\Delta)$$
$$\rightarrow x_0+2\Delta \rightarrow \hat{y}(x_0+2\Delta)$$
$$\cdots$$

. Mismos límites de LBL E

~ LBL e ≡ nº de armónicos para calcular $\hat{y}(x)$

$K\ \boxed{fE} \rightarrow K$

- almacena el nº de armónicos con que se desea calcular $\hat{y}(x)$. Ha de ser $1 \leq K \leq INT(\frac{N}{2})$ ó 9 )
- afecta al correcto funcionamiento de LBL B, LBL C

~ LBL c ≡ reposición de [ $INT(\frac{N}{2})$ ó 9 ] armónicos

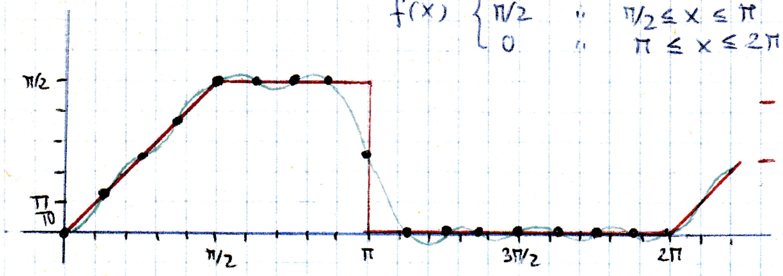
$\boxed{fC} \rightarrow \#$

- sirve para, si se ha variado el nº de armónicos para calcular $\hat{y}(x)$, restablecer el nº de armónicos adecuado calculado por el programa.
- lo restablece y lo presenta en pantalla.

**Ejemplos** 1) Tomamos la siguiente función definida en $[0, 2\pi]$ como sigue

$$f(x)\begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi/2 & \text{"} \ \pi/2 \le x \le \pi \\ 0 & \text{"} \ \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

y en cualquier otra parte $f(x+2\pi) = f(x)$




- Realizar su análisis armónico aproximado
- elegir el nº adecuado de armónicos para tener un error RMS $\le 0{,}05$

(en verde, forma aproximada de $\hat{y}(x)$ con $k=7$ ):

Tomamos 16 puntos-dato, según la tabla

| x | 0 | π/8 | π/4 | 3π/8 | π/2 | 5π/8 | 3π/4 | 7π/8 | π | 9π/8 | 5π/4 | 11π/8 | 3π/2 | 13π/8 | 7π/4 | 15π/8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | π/8 | π/4 | 3π/8 | π/2 | π/2 | π/2 | π/2 | π/4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

para $2\pi$, por periodicidad $y(2\pi) = y(0) = 0$

- introducimos los datos π/8 ↑ 16 A → 15π/8, 0 R/S → 7π/4 → 0, R/S, ... ,→ π/8, R/S → 0, R/S →

se forma la tabla

| k | $a_k$ | $b_k$ | $S_{MIN\,k}$ | k | $a_k$ | $b_k$ | $S_{MIN\,k}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,1781 | —— | 7,0938 | 5 | −0,0178 | 0,0833 | 0,0215 |
| 1 | −0,3224 | 0,8160 | 0,9354 | 6 | −0,0288 | −0,0407 | 0,0017 |
| 2 | −0,1676 | −0,2370 | 0,2612 | 7 | −0,0128 | 0,0068 | 0 |
| 3 | −0,0398 | 0,1072 | 0,1567 | 8 | 0 | 0 | — |
| 4 | 0 | −0,0982 | 0,0796 | | | | |

| k | RMS | k | RMS |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,6659 | 5 | 0'0367 |
| 1 | 0,2418 | 6 | 0'0103 |
| 2 | 0'1278 | 7 | 0 |
| 3 | 0'0990 | 8 | — |
| 4 | 0'0705 | | |

donde la columna de las $S_{MIN\,k}$ se obtiene mediante $\boxed{C}$. Según esto, la expresión analítica es:

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\,1'1781 + (-0'3224\cos x + 0{,}8160\,\text{sen}\,x) + (-0{,}1676\cos 2x - 0{,}2370\,\text{sen}\,2x) + \cdots$$

- los errores RMS se obtienen de $\sqrt{S_{MIN\,k}/N}$. Para cumplir RMS $\le 0{,}05$ basta con $k = 5$ armónicos

2) analizar armónicamente, calcular $\hat{y}(x)$ con diferentes k, hallar $S_{MIN\,k}$, para las funciones

| x | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 3 | 4 | 2 | 0 | 6 | 5 |

- calculamos armónicas
5 ↑ 7 $\boxed{A}$ → 30; 5 R/S → 25; 6 R/S → 20; 0 R/S → 15; 2 R/S → 10; 4 R/S → 5; 3 R/S → 0; 1 R/S → tabla siguiente

$a_0 = 6'0000$
$a_1 = 0'5602$, $b_1 = -0'7559$
$a_2 = -2{,}4408$, $b_2 = -0{,}7559$
$a_3 = -0{,}1194$, $b_3 = 0{,}7559$

calculamos ahora $\hat{y}(x)$ para $x = 0, 5, 10, \ldots, 30$ y $k = 3, 2, 1, 0$.

resulta: Ejplo, para $k=2 \Rightarrow$ 2 f E, 0 ↑ 5 D → tabla de valores

| | x=0 | x=5 | x=10 | x=15 | x=20 | x=25 | x=30 | SMINIMA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k=0 | 3,0000 | 3,0000 | 3,0000 | 3,0000 | 3,0000 | 3,0000 | 3,0000 | 28,0000 |
| k=1 | 3,5602 | 2,7583 | 2,1384 | 2,1673 | 2,8232 | 3,6123 | 3,9403 | 24,9015 |
| k=2 | 1,1194 | 2,5644 | 4,6655 | 1,2365 | 0,7104 | 5,4834 | 5,2204 | 2'0499 |
| k=3 | 1,0000 | 3,0000 | 4,0000 | 2,0000 | 0,0000 | 6,0000 | 5,0000 | —— |

para calcular $S_{MIN}$, no olvidar $\boxed{FC}$ previamente para restablecer el # correcto de arm.

3) Hallar los 16 armónicos necesarios para colocación en los siguientes 33 datos (tomados del lab. de Maq. Electr.)

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 2.00 | 1.85 | 1.60 | 1.50 | 1.52 | 1.65 | 1.10 | 0.70 | 0.35 | 0.05 | −0.28 | −0.58 | −0.80 | −1.00 | −1.26 | −1.80 | −2.00 | −1.90 | −1.75 | −1.55 | −1.55 | −1.62 | −1.64 | −1.30 |
| X | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | | | | | | | | | | | | | | | |
| Y | −0.65 | −0.27 | 0.02 | 0.30 | 0.60 | 0.75 | 1.01 | 1.40 | 1.82 | | | | | | | | | | | | | | | |

- los 9 primeros armónicos se calculan por el procedimiento habitual
- Si después queremos calcular los 7 restantes, es preciso hacer = 1 ↑ 33 $\boxed{A}$ → 32, ahora PRGM ← RUN, $\boxed{GTO}\boxed{\cdot}\boxed{045}$, $\boxed{7}\boxed{+}$, $\boxed{GTO}\boxed{\cdot}\boxed{033}$, PRGM → RUN → 32, 1.82 $\boxed{R/S}$ → 31, 1.40 $\boxed{R/S}$ ---- → 2 $\boxed{R/S}$ → aparecen los siguientes armónicos

→ $a_0 = -0.1048$ → (1) → $a_8 = 0.0332$ → $b_8 = 0.0162$ → ...... → (9) → $a_{16} = -0.0161$ → $b_{16} = 0.0010$ → 0.0000

y en resumen, obtenemos ⇒
$a_0 = -0.1048$, $a_4 = 0.0042$, $b_4 = 0.0380$, $a_{11} = -0.0076$, $b_{11} = -0.0142$
$a_5 = 0.1474$, $b_5 = -0.1201$, $a_{12} = 0.0161$, $b_{12} = -0.0131$
$a_1 = 1.7752$, $b_1 = 0.4475$, $a_6 = -0.0108$, $b_6 = -0.0171$, $a_{13} = 0.0015$, $b_{13} = -0.0022$
$a_7 = 0.0917$, $b_7 = 0.0051$, $a_{14} = 0.0238$, $b_{14} = 0.0102$
$a_2 = 0.0353$, $b_2 = 0.0030$, $a_8 = 0.0332$, $b_8 = 0.0162$, $a_{15} = -0.0050$, $b_{15} = 0.0096$
$a_9 = -0.0259$, $b_9 = -0.0117$, $a_{16} = -0.0161$, $b_{16} = 0.0010$
$a_3 = 0.0047$, $b_3 = 0.0112$, $a_{10} = -0.0151$, $b_{10} = 0.0178$,

que son los 16 armónicos pedidos

# Juego de los barcos

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LBL B | SF0 | + | R↓ | GTO E | ÷ | + | 0 | RCL C |
| STO B | RCL D | x≷I | RCL(i) | LBL 6 | FRAC | LBL 9 | STO C | ÷ |
| LBL C | LBL 1 | 9 | + | RC I | STO D | ISZ | PSE | ST I |
| SF2 | $10^x$ | 1/x | STO(i) | RCL B | RCL B | ABS | LBL D | RCL(i) |
| CF0 | STO E | DSP(i) | RCL E | − | 3 | RCL(i) | 4 | 2 |
| RCL A | RCL(i) | RND | RCL D | 1 | + | RCL E | GSB B | 3 |
| R→D | × | RCL C | $10^x$ | + | RCL E | + | 3 | x≷I |
| FRAC | FRAC | × | ÷ | x<0 | ÷ | STO(i) | GSB B | FRAC |
| STO A | RCL C | STO E | FRAC | GTO C | RCL C | R↓ | GSB C | RCL C |
| RCL C | × | RCL B | ISZ | ST I | ÷ | RC I | 2 | × |
| × | INT | ST I | RCL(i) | RCL(i) | + | x≷y | GSB B | $10^x$ |
| ENTER↑ | x≠0 | 3 | x≷y | RCL E | STO E | x>y | GSB C | × |
| F1? | GTO C | + | + | × | RC I | GTO 9 | GSB C | FRAC |
| + | F0? | 9 | STO(i) | FRAC | 1 | RCL D | 1 | RCL C |
| ST I | GTO 6 | 1/x | LASTX | RCL C | − | ISZ | GSB B | × |
| FRAC | RCL C | DSP(i) | RC I | × | ST I | RCL(i) | GSB C | INT |
| RCL C | RCL D | RND | 2 | INT | x<0 | + | GSB C | 4 |
| × | RCL B | × | − | x≠0 | GTO 8 | STO(i) | GSB C | x≷y |
| ENTER↑ | + | + | x<0 | GTO C | RCL D | GTO E | LBL E | x>y |
| INT | x>y | RCL D | GTO E | RC I | RCL(i) | LBL A | CLX | − |
| STO D | GTO C | $10^x$ | ST I | 1 | + | CLREG | DSP 0 | x≠0 |
| − | F2? | ÷ | R↓ | . | STO(i) | P≷S | STO D | x>0 |
| . | GTO 1 | FRAC | RCL(i) | 1 | LBL 8 | CLREG | LBL 0 | ISZ(i) |
| 5 | RCL B | R↑ | + | 1 | RC I | STO A | RTN | GTO 0 |
| x>y | 2 | ST I | STO(i) | RCL E | RCL B | 1 | STO E | |
| 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 224 |

## características

- 224 pasos
- todas las memorias
- libres LBL 2,3,4,5,7, a,b,c,d,e

## status

- FIX 1, DEG
- CF 1

## tiempos

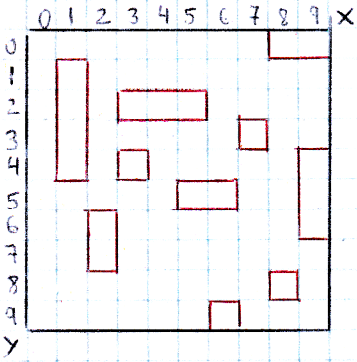
- para elegir la flota standard:

MÍNIMO = 1'25''

MEDIO = 2'

| JUEGO DE LOS BARCOS | | SF1 □□ CF1 □ | SE JUEGA CON R/S |
|---|---|---|---|
| (PAUSE)→R/S | CONTROL FLOTA | | |
| SEMILLA | TAMAÑO | REP. TAMAÑO | 2ª FLOTA | REP. PARTIDA |

## Explicación:



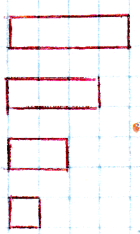

- En el juego stomdar de los barcos, la máquina coloca 10 barcos de diferentes tamaños en un cuadrado 10×10, de forma que no esten dos cualesquiera de ellos en contacto, ni vertical, ni horizontal, ni diagonalmente. El tamaño y el número de los barcos, es:

1 de 4

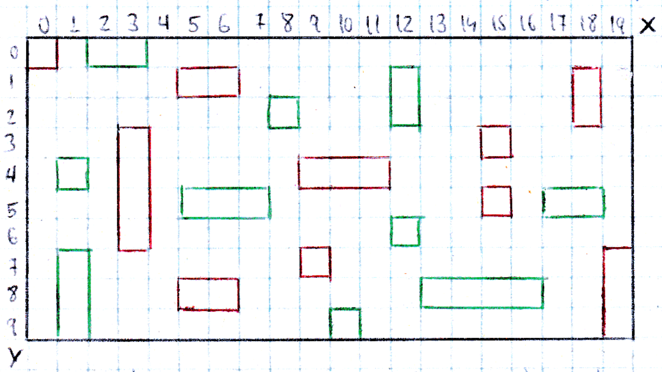
2 de 3

3 de 2

4 de 1

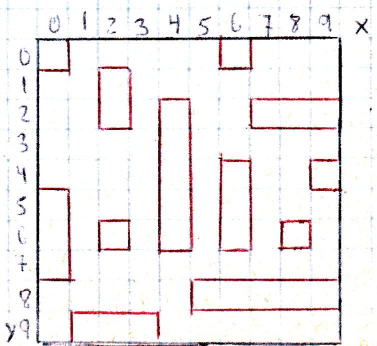


colocados al azar vertical u horizontalmente




- Opcionalmente, puede jugarse sobre un rectángulo 20 × 10, en el cual, a voluntad, puede colocarse una sola flota standard (en rojo) o bien dos (la segunda flota, en verde).

- Tambien opcionalmente, tanto sobre el cuadrado 10×10, como sobre el rectangulo 20×10, pueden colocarse cualquier nº de barcos de cualquier tamaño entre 1 y 5. Por ejemplo (al lado): 2 de 5, 4 de 3, 1 de 2, 5 de 1



~ <u>Instrucciones</u> = El objetivo del juego es hundir todos los barcos en un mínimo de disparos.

- se sigue la notación xy de los ejemplos

1) - si se desea jugar en cuadrado 10 x 10, CF1. Para rectángulo 20 x 10, SF1

2) - introducir semilla inicial (≠0) = n $\boxed{A}$ → aparece "10" en pausa

2.1) - si se desea jugar con flota standard, no hacer nada → elecc. de la flota → 0

2.2) - si se desea elegir el nº y tamaño de los barcos, $\boxed{R/S}$

2.2.1) - introducir n, y elegir al azar un barco de tamaño n ⇒ n $\boxed{B}$ → 0

2.2.2) - para elegir otro barco del mismo tamaño, $\boxed{C}$ → 0

2.2.3) - para elegir otro barco del mismo tamaño, ir a 2.2.2. De otro, ir a 2.2.1

2.3) - si estamos jugando en 20 x 10 y deseamos una segunda flota, después de la pausa no hacer nada, y cuando la elección de la 1ª flota termine, pulsar $\boxed{D}$ → 0.

3) una vez terminada la elección, introducir disparo: xy $\boxed{R/S}$ → código

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| código = 0 | ⇒ | agua | , | = -1, | hundido |
| = 1 | ⇒ | un barco cerca | , | = -2, | tocado o hundido |
| = 2 | ⇒ | dos id. | , | = -3, | id. |
| = 3 | ⇒ | tres id. | , | = -4, | id. |
| = 4 | ⇒ | cuatro id. | , | = -5, | id. |

para otro disparo, ir a 3, hasta hundir todos los barcos

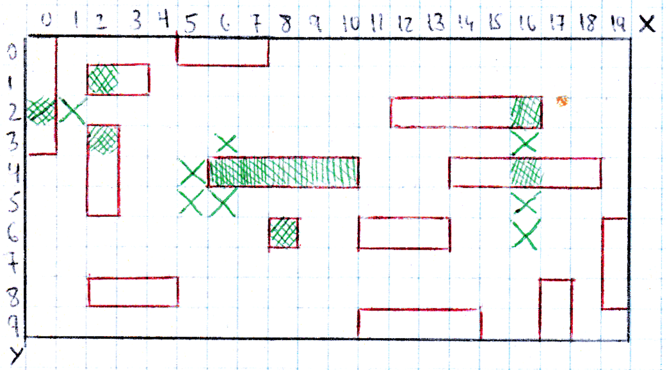
4) el último disparo está en $R_E$. El nº de jugadas efectuadas, en $\boxed{(i)}$ (disparos fallados)

5) para repetir la partida con los mismos barcos, $\boxed{E}$. Con distintos barcos, ir a 1.

<u>Advertencias</u>

- Si se juega con un nº y tamaño de barcos distinto del standard, tener precaución de que quepan sin tocarse dentro del 10 x 10 ó 20 x 10. Los barcos no se borran al ser hundidos.

<u>Ejemplo</u> = Una partida en 20 x 10, con 3 de 5, 2 de 2, 5 de 3, 2 de 4, 1 de 1




- introducir el programa; semilla, 1979
- tablero 20 x 10 ⇒ SF1, $\boxed{A}$ → 10, $\boxed{R/S}$
- elección de los barcos: 5 $\boxed{B}$ → 0 $\boxed{C}$ → 0 $\boxed{C}$ → 0
  2 $\boxed{B}$ → 0 $\boxed{C}$ → 0
  3 $\boxed{B}$ $\boxed{C}$ $\boxed{C}$ $\boxed{C}$ $\boxed{C}$
  4 $\boxed{B}$ $\boxed{C}$
  1 $\boxed{B}$ → 0
- ahora, ya podemos tratar de hundirlos =

55 $\boxed{R/S}$ → 1 (Hay 1 barco cerca)
65 $\boxed{R/S}$ → 1 ( id )
54 $\boxed{R/S}$ → 1 ( id )
64 $\boxed{R/S}$ → -5 (tocado uno de 5)
63 $\boxed{R/S}$ → 1 ( 1 barco cerca )
74 $\boxed{R/S}$ → -5 (tocado uno de 5)
84 $\boxed{R/S}$ → -5 (tocado uno de 5)

94 $\boxed{R/S}$ → -5 (tocado el de 5)
104 $\boxed{R/S}$ → -5 (hundido el de 5)
166 $\boxed{R/S}$ → 0 (agua)
165 $\boxed{R/S}$ → 1 (un barco cerca)
164 $\boxed{R/S}$ → -5 (tocado otro de 5)
163 $\boxed{R/S}$ → 2 (hay 2 barcos cerca)
162 $\boxed{R/S}$ → -5 (tocado otro de 5)

12 $\boxed{R/S}$ → 3 (hay 3 barcos cerca)
2 $\boxed{R/S}$ → -4 (tocado uno de 4)
21 $\boxed{R/S}$ → -2 (tocado uno de 2)
23 $\boxed{R/S}$ → -3 (tocado uno de 3)
86 $\boxed{R/S}$ → -1 (hundido el de 1)
$\boxed{RCL E}$ → 86 (último disparo)
$\boxed{(i)}$ → 8 disparos fallados hasta ahora

# Aproximaciones racionales: $y = \dfrac{a_0x^2+a_1x+a_2}{x^2+b_1x+b_2}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | LBL a | LBL A | RCL 8 | RCL 4 | STO E | × | × | RCL A | RCL C |
| – | STO 1 | RCL 2 | RCL 2 | RCL D | RCL C | − | RCL 4 | −x− | + |
| – | x≷y | RCL 0 | RCL D | RCL B | RCL A | RCL A | RCL 0 | RTN | × |
| – | STO 0 | RCL 3 | RCL A | GSB 0 | − | × | + | LBL 0 | RCL B |
| 5 | RTN | RCL 1 | GSB 0 | RCL A | × | RCL C | RCL E | − | + |
| – | LBL b | GSB 0 | RCL 1 | + | RCL 6 | RCL 2 | × | R↓ | x≷y |
| – | STO 3 | STO A | + | STO D | − | × | − | − | $x^2$ |
| – | x≷y | RCL 4 | STO D | RCL 6 | STO C | − | RCL 1 | R↑ | LASTX |
| – | STO 2 | RCL 0 | RCL 6 | RCL 4 | RCL 2 | STO A | RC I | x=0 | RC I |
| 10 | RTN | RCL 5 | RCL 2 | RCL C | − | RCL 1 | × | GSB 1 | × |
| – | LBL c | RCL 1 | RCL C | RCL B | RCL D | × | + | ÷ | + |
| – | STO 5 | GSB 0 | RCL A | GSB 0 | RCL 1 | RCL B | STO C | RTN | RCL A |
| – | x≷y | STO B | GSB 0 | RCL A | − | RCL C | x≷y | LBL 1 | + |
| – | STO 4 | RCL 6 | RCL 1 | + | RCL A | × | STO B | CLX | ÷ |
| 15 | RTN | RCL 0 | + | STO C | × | RCL E | LBL B | EEX | RTN |
| – | LBL d | RCL 7 | STO C | RCL 8 | + | RCL 4 | RCL D | CHS | |
| – | STO 7 | RCL 1 | RCL 4 | RCL 6 | ST I | × | −x− | 5 | |
| – | x≷y | GSB 0 | RCL 2 | RCL D | RCL B | − | RCL C | 0 | |
| – | STO 6 | STO C | RCL B | RCL C | RCL 1 | RCL 0 | −x− | RTN | |
| 20 | RTN | RCL 8 | RCL A | GSB 0 | − | × | RCL B | LBL C | |
| – | LBL e | RCL 0 | GSB 0 | RCL B | STO B | − | −x− | ↑ | |
| – | STO 9 | RCL 9 | RCL 1 | + | RCL C | RCL C | 1 | ↑ | |
| – | x≷y | RCL 1 | + | STO D | × | RCL 0 | −x− | ↑ | |
| – | STO 8 | GSB 0 | STO B | RCL B | RCL E | − | RC I | RCL D | |
| 25 | RTN | STO D | RCL 8 | − | RCL 4 | RCL B | −x− | × | |
| | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 215 |

**características**

- 215 pasos
-
- libres LBL D, E, 2, 3, ... 9

**status**

- FIX 4, CF0, 1, 2, 3, DEG

**tiempos**

- cálculo de coef = 11 seg.
- cálculo de $\hat{y}$ = 2 seg.

| APROXIMACIONES RACIONALES: $y = \dfrac{a_0x^2+a_1x+a_2}{x^2+b_1x+b_2}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1 \uparrow y_1$ | $x_2 \uparrow y_2$ | $x_3 \uparrow y_3$ | $x_4 \uparrow y_4$ | $x_5 \uparrow y_5$ |
| $\rightarrow a_0, a_1 \ldots$ | REVISION | $x \rightarrow y$ | | |

## Utilización

- introducir datos: $x_1 \uparrow y_1$ $\boxed{f\ A}$ → $x_1$, $x_2 \uparrow y_2$ $\boxed{f\ B}$ → $x_2$
  $x_3 \uparrow y_3$ $\boxed{f\ C}$ → $x_3$, $x_4 \uparrow y_4$ $\boxed{f\ D}$ → $x_4$, $x_5 \uparrow y_5$ $\boxed{f\ E}$ → $x_5$
- si se desea cambiar algún dato, introduzcase de nuevo
- Calcular coeficientes: $\boxed{A}$ → $a_0$ → $a_1$ → $a_2$ → 1 → $b_1$ → $b_2$
- para revisar los coeficientes sin recalcularlos:
  $\boxed{B}$ → $a_0$ → $a_1$ → $a_2$ → 1 → $b_1$ → $b_2$
- para realizar estimaciones: $x$ $\boxed{C}$ → $y$.

(existen casos no resolubles. Se aconseja comprobar el cálculo)

## Observaciones

- sirve para puntos igual o desigualmente espaciados.
- pueden introducirse valores de $y$ para $x \to \infty$ ó polos (ver ejemplos)
- todos los datos permanecen almacenados, no son afectados por el programa
- las estimaciones se basan en la función racional calculada:

$$\hat{y} = \frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{x^2+b_1x+b_2}$$

el coef. de $x^2$ del denominador está forzado a ser 1 (ver ejemplos)

- los datos pueden incluir un máximo de 2 ceros y/o 2 polos
- los datos deben ser consistentes con el tipo de función que se calcula.

| | |
|---|---|
| 0 | $x_1$ |
| 1 | $y_1$ |
| 2 | $x_2$ |
| 3 | $y_2$ |
| 4 | $x_3$ |
| 5 | $y_3$ |
| 6 | $x_4$ |
| 7 | $y_4$ |
| 8 | $x_5$ |
| 9 | $y_5$ |
| A | $b_2$ |
| B | $a_2$ |
| C | $a_1$ |
| D | $a_0$ |
| E | used |
| I | |

**Ejemplo 1**: Hallar una función racional que incluya los siguientes datos:

| X | 1 | +2 | 0 | −1 | −0.24 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | −2 | −3 | −7 | +0.25 | 0.38 |

Predecir $y(4,2)$, $y(-4,2)$, $y(\infty)$

- Introducimos datos: 1 ↑ −2 $\boxed{fA}$, 2 ↑ −3 $\boxed{fB}$, 0 ↑ −7 $\boxed{fC}$, −1 ↑ 0.25 $\boxed{fD}$, −0.24 ↑ 0.38 $\boxed{fE}$
- calculamos coeficientes: $\boxed{DSP\ 9}$ $\boxed{A}$

resulta: $$y = \frac{15.20820112x^2 + 14.80964569x + 4.071807998}{x^2 - 17.46314055x - 0.581686856}$$

- predicciones: $\boxed{DSP\ 5}$

4.2 $\boxed{C}$ → −5.94357 ( = $y(4.2)$ )

−4.2 $\boxed{C}$ → 2.32451 ( = $y(-4.2)$ )

$10^9$ $\boxed{C}$ → 15.20820 ( $\simeq y(\infty)$ )

**Ejemplo 2**: Hallar la función racional especificada por sus ceros y polos, como sigue:

| X | 0 | −2.3 | 1.8 | 3.6 | 0.7 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | −2 | 0 | 0 | ∞ | ∞ |

Predecir $y(\infty)$

- Introducimos datos: 0 ↑ −2 $\boxed{fA}$, −2.3 ↑ 0 $\boxed{fB}$, 1.8 ↑ 0 $\boxed{fC}$, 3.6 ↑ $10^9$ $\boxed{fD}$, 0.7 ↑ $10^{10}$ $\boxed{fE}$
- calculamos coeficientes: $\boxed{A}$ → resulta

$$y = \frac{1.21739x^2 + 0.60870x - 5.04000}{x^2 - 4.30000x + 2.52000}$$

- predicción: $10^9$ $\boxed{C}$ → 1.21739 ( $\simeq y(\infty)$ )

**Ejemplo 3**: Hallar una raíz real de $x^3 - x - 1 = 0$ comprendida entre $1.1 \leq x \leq 1.5$, dados los puntos correspondientes a $x^3 - x - 1 = y$.

| X | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | −0.769 | −0.472 | −0.103 | 0.344 | 0.875 |

- Aplicamos interpolación inversa: introducimos los datos con x, y intercambiadas: ⇒

⇒ −0.769 ↑ 1.1 $\boxed{fA}$, −0.472 ↑ 1.2 $\boxed{fB}$, etc, etc., 0.875 ↑ 1.5 $\boxed{fE}$

- calculamos coeficientes: $\boxed{A}$ → 3.20130 → 21.53719 → 27.67468 → 1 → 12.56053 → 20.89106
- calculamos la raíz: será el valor de x tal que y = 0. Como intercambiamos x e y,

$\boxed{DSP\ 6}$ 0 $\boxed{C}$ → 1.324714

(la raíz es 1.324717. El error es ~ $3,8 \cdot 10^{-6}$ )

**Ejemplo 4**: Ilustrar las dificultades de cálculo al restituir $y = \frac{1}{x}$ a partir de los siguientes datos:

| X | 2 | −3 | 0 | ∞ | 0.27 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y | 1/2 | −1/3 | ∞ | 0 | 1/0.27 |

- Introducimos los datos:

2 ↑ $\frac{1}{2}$ $\boxed{fA}$, −3 ↑ $-\frac{1}{3}$ $\boxed{fB}$, 0 ↑ $10^9$ $\boxed{fC}$, $10^{10}$ ↑ 0 $\boxed{fD}$, 0.27 ↑ $\frac{1}{0.27}$ $\boxed{fE}$

- calculamos coeficientes: resulta

$$y = \frac{2 \cdot 10^{-10}x^2 - 2x - 10^{10}}{x^2 - 10^{10}x - 10}$$

- dividiendo todo, numerador y denominador por $-10^{10}$, se obtiene:

$$y = \frac{-2 \cdot 10^{-20}x^2 + 2 \cdot 10^{-10}x + 1}{-10^{-10}x^2 + x + 10^{-9}}$$

, que, despreciando los coeficientes $\leq 10^{-9}$ como efectos de error, queda

$$= \frac{1}{x}$$

estos problemas surgen por el valor fijo 1 del coeficiente de $x^2$ en el denominador.