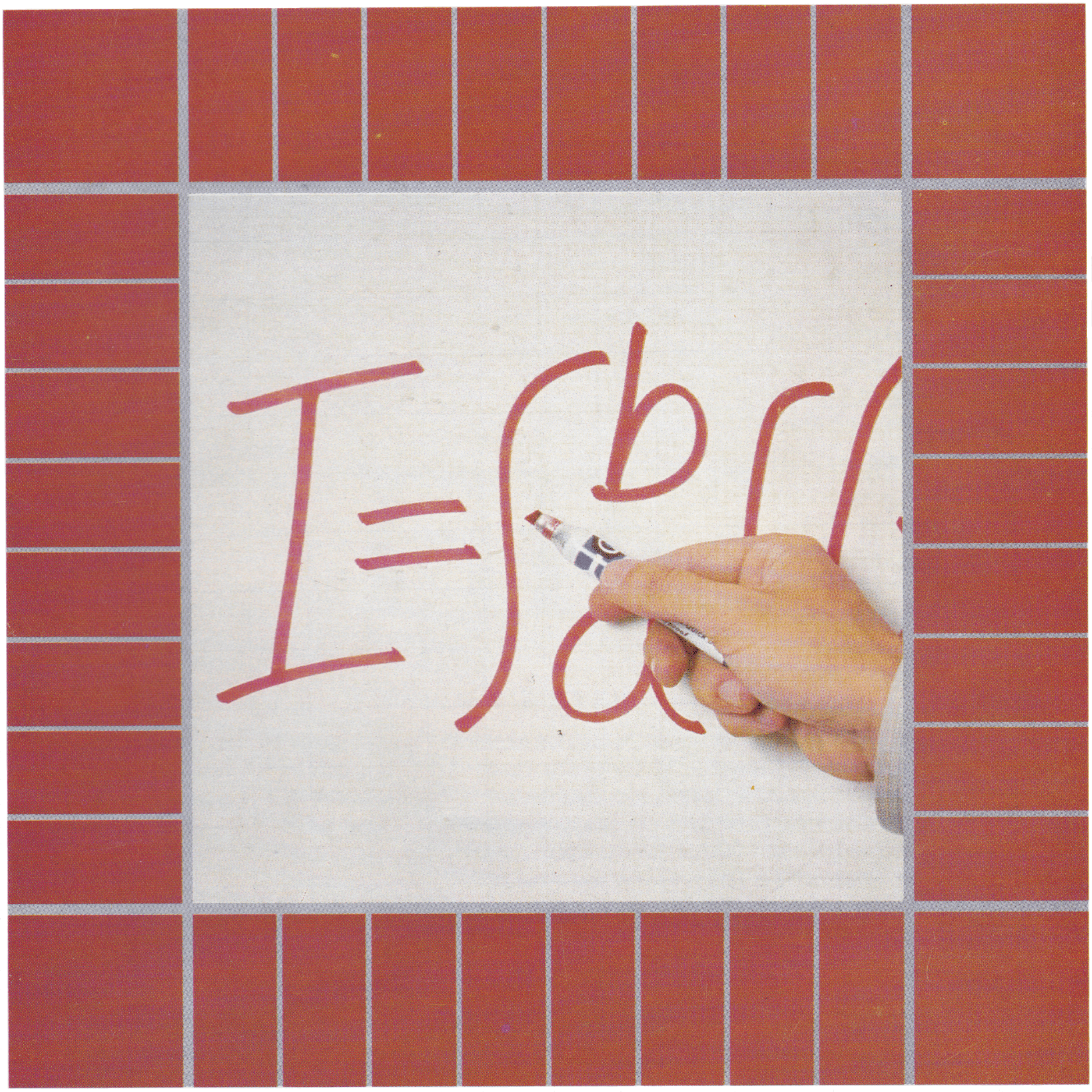
HEWLETT-PACKARD

HP-34C

Matemática avanzada



ADVERTENCIA

HEWLETT-PACKARD

HP-34C

Matemática avanzada

HP-34C

CAMBIOS DE BASE

FACTORES PRIMOS, MCD, DECIMAL A FRACCION

ECUACION DE 4º GRADO

SISTEMAS DE ECUACIONES : $f(x,y) = 0 \qquad g(x,y) = 0$

AREAS, LONGITUDES, VOLUMENES

INTEGRALES DOBLES : $\int_{Xo}^{Xm} \int_{Yo}^{Yn} f(x,y)dy\, dx$

SUMACION DE SERIES INFINITAS ALTERNADAS

ECUACIONES DIFERENCIALES : $y' = f(x,y)$

SISTEMAS DE EC. DIFERENCIALES : $\left\{\begin{array}{l} y' = f(x,y,z,) \\ z' = g(x,y,z) \end{array}\right\}$

OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS

OPERACIONES VECTORIALES

DETERMINANTE, ECUACION CARACTERISTICA, AUTOVALORES DE UNA MATRIZ 3x3

INTERPOLACION

AJUSTE DE DATOS

ANALISIS ARMONICO

RESOLUCION DE TRIANGULOS

TABLAS DE AMORTIZACION

CALENDARIO

Autores: Valentín Albillo
Fernando del Rey

CAMBIOS DE BASE

1.- Descripción .- Este programa permite pasar números en base 10 a cualquier otra base, y viceversa. Igualmente, pueden pasarse números en base B a otra base B´, ambas distintas de 10. Se puede trabajar con cualquier base, (con la limitación lógica de que sea entera y mayor que 1) y los números pueden tener parte entera y fraccionaria.

Los algoritmos utilizados son los siguientes:

$N_B \rightarrow N_{10}$ Tenemos un número en base B de la forma:

$$N_B = \ldots x_2 x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2} \ldots \quad (0 \leq x_i < B)$$

El número equivalente en base 10 será :

$$N_{10} = \sum_i x_i . B^i$$

El programa descompone N_B dígito por dígito y realiza el sumatorio multiplicando cada dígito por su correspondiente potencia de B. Primero lo hace con la parte entera, y luego con la decimal .

$N_{10} \rightarrow N_B$ Este algoritmo resulta algo más artificioso. N_{10} se descompone en sus partes entera y fraccionaria y se obtiene N_B como sigue:

-la parte entera de N_{10} se divide sucesivamente por B, obteniendose como resultado de cada i-ésima división una parte entera que será dato para la siguiente división , y un resto R_i .La parte entera de N_B sera:

$$INT(N_B) = \sum_i R_i . 10^{ki} \quad , i = 0,1,2, \ldots$$

siendo: $k = 1$ si $1 < B \leq 10$
$k = 2$ si $10 < B \leq 100$
$k = 3$ si $100 < B \leq 1000$, etc

-la parte fraccionaria de N_{10} se multiplica sucesivas veces por B obteniendose como resultado de cada i-ésima multiplicación una parte fraccionaria que sirve de dato para la siguiente multiplicación, y una parte entera S_i. La parte fraccionaria de N_B será :

$$FRAC(N_B) = \sum_i S_i . 10^{-ki} \quad , i = 1,2,3, \ldots$$

$N_B \rightleftarrows N_{B'}$ Simplemente utiliza los algoritmos anteriores para convertir el número expresado en una de las bases a base 10, y de ésta a la otra base

2.- Notas .-

-el programa no realiza ningun test para comprobar si los datos de entrada son consistentes. En caso de no serlo , los resultados serán erroneos

-la precisión puede verse afectada si se realizan sucesivos cambios de base, puesto que la longitud de cada número (esto es, el número de dígitos de que consta ese número) es diferente de una base a otra, y pueden perderse cifras en el proceso.

3.- Utilización .- Introducir el programa, y ejecutar uno de los siguientes casos:

(1) $N_B \rightarrow N_{10}$: -introducir la base B: B $\boxed{GSB0}$
- id. el número N_B — N_B $\boxed{A} \rightarrow N_{10}$

(2) $N_{10} \rightarrow N_B$: -introducir la base B : B $\boxed{\text{GSB 0}}$
-introducir el número N_{10} : N_{10} $\boxed{B}$ → N_B

(3) $N_B \rightleftarrows N_{B'}$: -introducir B' y B : B' $\boxed{\text{ENTER}}$ B $\boxed{\text{GSB 0}}$
(por este orden)

($N_B \rightarrow N_{B'}$) -introducir el número N_B : N_B $\boxed{\text{GSB 1}}$ → (N_{10}) → $N_{B'}$

($N_B \leftarrow N_{B'}$) -introducir el número $N_{B'}$: $N_{B'}$ $\boxed{\text{GSB 2}}$ → (N_{10}) → N_B

Notas: - los valores de B y B' permanecen en memoria, salvo que se introduzcan nuevos valores que alteren a los anteriores. Por consiguiente sólo es necesario introducirlos una vez si se va a trabajar constantemente con la misma B (y la misma B')

- Es importante el formato de entrada y salida de los números, según la base con la que se trabaje, pues cada dígito real del número en base B puede ocupar uno ó varios dígitos en pantalla.

$1 < B \leq 10$: cada dígito real del nº ocupa uno en pant.
$10 < B \leq 100$: id. id. id. id. id. dos id.

$$\ldots \underbrace{xx}_{y}\underbrace{xx}_{y}\underbrace{xx}_{y},\underbrace{xx}_{y}\underbrace{xx}_{y}\underbrace{xx}_{y}$$ -dígitos de pantalla / - id. reales de N_B

para bases $100 < B \leq 1000$, cada dig. ocupa 3 en pantalla, etc.

3.- Ejemplos :

(1) Convertir 8, 9, 10, ... , 15 a base 2

$\boxed{\text{FIX 0}}$ 2 $\boxed{\text{GSB 0}}$
8 $\boxed{B}$ → 1000 ; 9 $\boxed{B}$ → 1001
10 $\boxed{B}$ → 1010 ; 11 $\boxed{B}$ → 1011
12 $\boxed{B}$ → 1100 ; 13 $\boxed{B}$ → 1101
14 $\boxed{B}$ → 1110 ; 15 $\boxed{B}$ → 1111

(2) Cual es la expresión de π en base 5 ? ¿ Y en base 15 ? Comprobar los resultados.

$\boxed{\text{FIX 9}}$ 5 $\boxed{\text{GSB 0}}$ π $\boxed{B}$ → $3,032322143_5 = \pi_5$

(comprobación) $\boxed{A}$ → $3,141592576_{10} = \pi_{10}$

obsérvese la pérdida de precisión debida a la conversión a base 5

15 $\boxed{\text{GSB 0}}$ π $\boxed{B}$ → $3,02\ 01\ 12\ 13\ 0_{15} = \pi_{15}$

(comprobación) $\boxed{A}$ → $3,141590123_{10} = \pi_{10}$

- vemos pués que en ambos casos se pierde precisión, aunque los motivos son algo distintos. En el primer caso se debe a que 10 dígitos en base 5 no aportan la misma precisión que en base 10 : en efecto, una unidad en el noveno lugar en base 10 da una resolución de hasta 0.000000001, en tanto que una unidad en el mismo noveno puesto en base 5 sólo da resolución de

$$1.5^{-9} = 0.000000512$$, bastante menos fina

en el segundo caso, la pérdida de precisión se debe a que en base 15 cada dígito real sólo puede ser representado mediante dos en pantalla, con lo cual ésta sólo contiene 5 dígitos reales del número, que nos proporcionarán una precisión no superior al

$$1.15^{-5} = 0.000001317$$

(3) Convertir de base 4 a base 7 los números 123,321 y 321,123 , y comprobar los resultados ;

$\boxed{\text{FIX 3}}$ 7 $\boxed{\text{ENTER}}$ 4 $\boxed{\text{GSB 0}}$

123,321 $\boxed{\text{GSB 1}}$ → (27,891) → 36,614

(comprobación) $\boxed{\text{GSB 2}}$ → (27,891) → 123,321

321,123 $\boxed{\text{GSB 1}}$ → (57,422) → 111,264

(comprobación) $\boxed{\text{GSB 2}}$ → (57,422) → 321,123

luego ha resultado ser: $123,321_4 = 36,614_7$

$321,123_4 = 111,264_7$

(4) Hallar en base 7 el valor de la expresión : $434_9/161_8$

-el programa realiza conversiones entre bases, pero no aritmética. Sin embargo la calculadora en sí , si que realiza aritmetica, en base 10 para ser exactos, así que debemos convertir todos los números a la base 10, realizar la aritmética necesaria entre estos números, y reconvertir el resultado a la base pertinente:

$\boxed{\text{FIX 9}}$ 9 $\boxed{\text{GSB 0}}$ 434 $\boxed{\text{A}}$ → 355.0000000_{10} $\boxed{\text{STO 6}}$

8 $\boxed{\text{GSB 0}}$ 161 $\boxed{\text{A}}$ → 113.0000000_{10} $\boxed{\text{STO/ 6}}$

7 $\boxed{\text{GSB 0}}$ $\boxed{\text{RCL 6}}$ $\boxed{\text{B}}$ → 3.066365160_7

por consiguiente, $434_9/161_8 = 3.066365160_7$

----- ----- ----- -----

HP 34 C

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL A	25.13.11	$N_B \rightarrow N_{10}$
	RCL 0	24. 0	
	•	73	calcula el nº de
	5	5	dígitos necesa -
5	-	41	rios para el for
	LOG	14. 2	mato de salida
	INT	25.32	del número en
	1	1	base B:
	+	51	$2 \leq B \leq 10$ - 1 dig
10	10^x	15. 2	$10 < B \leq 100$ - 2 dig
	STO 4	23. 4	etc
	CL X	34	
	STO 3	23. 3	$\Sigma = 0$ en R3
	STO I	23.14.23	i = 0 en RI
15	R↓	15.22	
	FRAC	25.33	separa parte
	STO 2	23. 2	entera y frac-
	LAST X	25. 0	cionaria en N_B
	INT	25.32	
20	STO 1	23. 1	
*	LBL 3	25.13. 3	Transforma la
	RCL 1	24. 1	parte entera
	x= 0	15.71	
	GTO 4	22. 4	bifurca si ha
25	RCL 4	24. 4	terminado
	/	71	
	INT	25.32	separa un nuevo
	STO 1	23. 1	dígito x_i
	LAST X	25. 0	
30	FRAC	25.33	
	RCL 4	24. 4	
	x	61	
	RCL 0	24. 0	B^i
	RCL I	24.14.23	
35	y^x	25. 3	$x_i . B^i$
	x	61	
	STO+ 3	23.51. 3	$\Sigma = \Sigma + x_i . B^i$
	ISG	15.24	
	GTO 3	22. 3	i = i+ 1
40	GTO 3	22. 3	
*	LBL 4	25.13. 4	prepara el re-
	1	1	gistro contador
	CHS	32	
	STO I	23.14.23	i = -1
45 *	LBL 5	25.13. 5	
	RCL 2	24. 2	transforma la
	x =0	15.71	parte fraccio-
	GTO 6	22. 6	naria
	RCL 4	24. 4	
50	x	61	
	FRAC	25.33	
	STO 2	23. 2	
	LAST X	25. 0	
	INT	25.32	
55	RCL 0	24. 0	

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	RCL I	24.14.23	B^i
	y^x	25. 3	$x_i . B^i$
	x	61	
	STO+ 3	23.51. 3	$\Sigma = \Sigma + x_i . B^i$
60	DSE	15.23	
	GTO 5	22. 5	i = i - 1
	GTO 5	22. 5	
*	LBL B	25.13.12	$N_{10} \rightarrow N_B$
	RCL 0	24. 0	
65	•	73	cálculo para e
	5	5	formato de los
	-	41	números em bas
	LOG	14. 2	B.
	INT	25.32	
70	1	1	
	+	51	cálculo de k
	EEX	33	
	5	5	
	/	71	
75	STO I	23.14.23	preparación de
	CLX	34	registros
	STO 3	23. 3	
	R↓	15.22	
	FRAC	25.33	
80	STO 2	23. 2	separa parte e
	LAST X	25. 0	tera y fraccio
	INT	25.32	naria de N_{10}
	STO 1	23. 1	
*	LBL 7	25.13. 7	
	RCL 1	24. 1	transforma la
	x =0	15.71	parte entera
	GTO 8	22. 8	
	RCL 0	24. 0	
	/	71	obtiene resto
90	INT	25.32	R_i de la divi-
	STO 1	23. 1	sión por B
	LAST X	25. 0	
	FRAC	25.33	
	RCL 0	24. 0	
95	x	61	
	RCL I	24.14.23	K_i
	INT	25.32	10^{k_i}
	10^x	15. 2	
	x	61	
100	STO+ 3	23.51. 3	$\Sigma = \Sigma + R_i . 10^{k_i}$
	ISG	15.24	
	GTO 7	22. 7	$k_i = k_i + k$
	GTO 7	22. 7	
*	LBL 8	25.13. 8	

- no se utiliza ningun flag
- se utilizan todas las etiquetas
- id. registros I,0,1,2,3,4,5
- id. en total 161 pasos de programa
- se recomienda moda FIX
- id. cualquier moda angular

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	INT	FRAC	Σ	10^k	B′				
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	RCL I	24.14.23	
	FRAC	25.33	prepara el re-
	.	73	gistro conta-
	0	0	dor
	0	0	
	9	9	
	+	51	
	STO I	23.14.23	
	ISG	15.24	i =′k
*	LBL 9	25.13. 9	
	RCL 2	24. 2	Transforma la
	x=0	15.71	parte fraccio-
	GTO 6	22. 6	naria :
	RCL 0	24. 0	
	x	61	
	FRAC	25.33	
	STO 2	23. 2	separa S_i
	LAST X	25. 0	
	INT	25.32	k_i
	RCL I	24.14.23	
	INT	25.32	
	CHS	32	
	10^x	15. 2	10^{-k_i}
	x	61	
	STO+ 3	23.51. 3	$\Sigma = \Sigma + S_i.10^{-k_i}$
	ISG	15.24	
	GTO 9	22. 9	bifurca si $k_i \geq 9$
*	LBL 6	25.13. 6	
	RCL 3	24. 3	salida de resul
	RTN	25.12	tados
*	LBL 0	25.13. 0	
	STO 0	23. 0	almacenamiento
	x⇄y	21	de B y B′
	STO 5	23. 5	
	x⇄y	21	
	RTN	25.12	
*	LBL 2	25.13. 2	$N_{B'} \to N_B$
	GSB 6	13. 6	
	GSB A	13.11	$N_{B'} \to N_{10}$
	PAUSE	25.74	
	GSB 6	13. 6	
	GSB B	13.12	$N_{10} \to N_B$
	RTN	25.12	
*	LBL 1	25.13. 1	$N_B \to N_{B'}$
	GSB A	13.11	
	GSB 6	13. 6	$N_B \to N_{10}$
	PAUSE	25.74	
	GSB B	13.12	
	GSB 6	13. 6	$N_{10} \to N_{B'}$
	RTN	25.12	
*	LBL 6	25.13. 6	
	RCL 0	24. 0	subrutina
	RCL 5	24. 5	auxiliar
	GSB 0	13. 0	
	R↓	15.22	
	R↓	15.22	
	RTN	25.12	

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	INT	FRAC	Σ	10^k	B′				

FACTORES PRIMOS , MCD , DECIMAL A FRACCION

1.- Descripción .- Presentamos aquí una colección de subrutinas relacionadas con Teoría de números:

Factores de un número: Dado un entero N , halla sucesivamente todos sus factores primos, presentándolos durante pausas,y se detiene con el último factor en pantalla, con signo negativo (para indicar que es el último). Si el N es primo, aparecerá él mismo, con signo "-" . El programa prueba todos los divisores -- desde 2 hasta la raiz cuadrada de N, excepto los múltiplos de 2,3 ó 5. Esto reduce considerablemente el tiempo de computación. Incluso asi, para N muy grande , el tiempo puede ser bastante considerable.

Máximo común divisor (MCD): Dados dos enteros P, Q, halla su máximo común divisor, empleando para ello el - algóritmo de Euclides. Si los dos enteros son primos entre sí, su - MCD es la unidad. El tiempo de computación es corto.

Decimal a fracción: Halla aproximaciónes racionales a un número decimal dado, esto es, halla fracciones con enteros por numerador y denominador, de forma que su cociente sea aproximadamente igual a un decimal cualquiera dado. Emplea el algoritmo de fracciones continuas: para ello, primeramente forma una fracción con el decimal D, y a continuación calcula las reducidas sucesivas de esa fracción, de una forma iterativa, mostrando a cada iteración el numerador y el denominador de la reducida correspondiente, su cociente, y el error entre este cociente y D. Cuando el error es cero el programa se detiene y muestra el numerador y el denominador de - la última reducida. En cualquier momento puede detenerse el proceso y mostrar en pantalla los valores de num. y den. de la actual.

2.- Utilización .-

(1) Introducir el programa

(2) -para hallar factores de un número:

-introducir N: N $\boxed{A}$ → (1^{er} factor) → (2º factor) →...

→... → -(ultimo factor)

(3) - para hallar el MCD de P y Q:

-introducir P y Q : P $\boxed{ENTER}$ Q $\boxed{B}$ → MCD(P,Q)

(4) -para hallar aprox. racionales a un decimal D :

-introducir D : D $\boxed{GSB\ 9}$ → (N_1) → (D_1) → (N_1/D_1) → ($error_1$

→... → (N_n) → (D_n)

-para presentar los valores de N,D correspondientes a un error últimamente calculado: parar el programa $\boxed{R/S}$

$\boxed{GSB\ 8}$ → (N_i) → D_i

(5) para otros valores, ir al paso adecuado.

3.- Notas .-
- N debe ser entero, positivo; D puede ser negativo
- Se recomienda que N no exceda de 10^8
- puede ahorrarse el registro R.1 suprimiendo el paso 127 siempre que no se coloque ningún programa más despues.
- las 3 subrutinas A,B,9 son independientes, y pueden introducirse con independencia unas de otras.

4.- Ejemplos:

(1)-- Hallar la descomposición en factores primos de 32670001

-introducir N: 32670001 [A] → (7) → (13) → (31) → (37) → -313

luego, 32670001 = 7 x 13 x 31 x 37 x 313

(2)-- Hallar la descomposición en factores primos de 7332197

-introducir N: 7332197 [A] → (983) → -7459

es decir, 7332197 = 983 x 7459 (tardó algo menos de 5 min.)

(3)-- Comprobar si 72727 , 10001 , 11111 , 5555551 , son primos

72727 [A] → -72727 , es primo

10001 [A] → (73) → -137 ; 10001 = 73 x 137 , no es primo

11111 [A] → (41) → -271 ; 11111 = 41 x 271 , no es primo

5555551 [A] → (773) → -7187 ; 5555551 = 773 x 7187 , no es primo

(4)-- Hallar el máximo común divisor de 32670001 y 7331438

32670001 [ENTER] 7331438 [B] → 31 es el MCD

(5)-- Hallar el MCD de 7777771 y 1777777

7777771 [ENTER] 1777777 [B] → 1 , son primos entre sí

(6)-- Hallar fracciones cuyo valor se aproxime a π = 3.141592654

3.141592654 [GSB 9] → obtenemos la siguiente tabla:

NUMERADOR	DENOMINADOR	COCIENTE	ERROR
3	1	3.000000000	0.141592654
22	7	3.142857143	-0.001264489
333	106	3.141509434	0.000083220
355	113	3.141592920	-0.000000266
104348	33215	3.141592654	0.000000000

y el programa se detiene presentando 104348 y 33215

luego 104348/33215 = 3.141592654 ,que coincide con π hasta 10 cifras.

(7)-- Hallar una aproximación a Ln 2 = 0.6931471806, con error < 0.0001

2 [Ln] [GSB 9] → (0) → (1) → (0.000000000) → (0.693147181) →
→ (1) → (1) → (1.000000000) → (-0.306852819) →
→ (2) → (3) → (0.666666667) → (0.026480514) →
→ (7) → (10) → (0.700000000) → (-0.006852819) →
→ (9) → (13) → (0.692307692) → (0.000839488) →
→ (61) → (88) → (0.693181818) → (-0.000034638) [R/S]

[GSB 8] → (61) → 88

así pues, la fracción 61/88 =0.693181818 se diferencia de Ln 2 en no más de 0.00004 < 0.0001

HP 34 C

KEY ENTRY	KEY CODE
* LBL A	25.13.11
STO 0	23. 0
0	0
STO 1	23. 1
2	2
GSB 0	13. 0
1	1
GSB 0	13. 0
2	2
GSB 0	13. 0
2	2
GSB 0	13. 0
* LBL 1	25.13. 1
4	4
GSB 0	13. 0
2	2
GSB 0	13. 0
4	4
GSB 0	13. 0
2	2
GSB 0	13. 0
4	4
GSB 0	13. 0
6	6
GSB 0	13. 0
2	2
GSB 0	13. 0
6	6
GSB 0	13. 0
GTO 1	22. 1
* LBL 0	25.13. 0
STO + 1	23.51. 1
RCL 0	24. 0
RCL 1	24. 1
/	71
LAST X	25. 0
x > y	14.51
GTO 2	22. 2
x ⇄ y	21
FRAC	25.33
x ≠ 0	15.61
RTN	25.12
LAST X	25. 0
STO 0	23. 0
RCL 1	24. 1
PAUSE	25.74
0	0
GTO 0	22. 0
* LBL 2	25.13. 2
RCL 0	24. 0
CHS	32
R/S	74
LBL B	25.13.12
ENTER	31
ENTER	31

esta subrutina halla los factores primos de un entero dado:

para ello prúeba como divisores a todos los enteros desde 2 hasta el primero que no supere la raiz cuadrada del número a factorizar, excepto los múltiplos de 2, 3, ó 5 .

Cuando encuentra un divisor lo muestra en pantalla durante 1 seg., divide el número por él y trata de hallar factores del nuevo número.

El proceso continua hasta llegar al último factor, que se muestra con signo negativo, para indicar que es el último.

Si el número es primo, se muestra el mismo con signo negativo.

KEY ENTRY	KEY CODE
CL X	34
+	51
R↓	15.22
/	71
INT	25.32
R↑	14.22
x	61
-	41
x ≠ 0	15.61
GTO B	22.12
+	51
RTN	25.12
* LBL 9	25.13. 9
STO 8	23. 8
CL Σ	14.34
EEX	33
9	9
x	61
LAST X	25. 0
1	1
STO 6	23. 6
STO 7	23. 7
R↓	15.22
* LBL 3	25.13. 3
STO 0	23. 0
x ⇄ y	21
STO 1	23. 1
x ⇄ y	21
/	71
INT	25.32
STO 2	23. 2
RCL 1	24. 1
x ⇄ y	21
RCL 0	24. 0
x	61
-	41
STO 3	23. 3
RCL 4	24. 4
RCL 6	24. 6
STO 4	23. 4
RCL 2	24. 2
x	61
+	51
STO 6	23. 6
FIX 0	14.11. 0
PAUSE	25.74
RCL 7	24. 7
RCL 5	24. 5
STO 7	23. 7

la subrutina
halla el máx:
mo común div
sor de 2 ent
ros dados, u
lizando el a
goritmo de
Euclides. Si
ambos son pr
mos entre sí,
entonces MCD
es igual a 1

la subrutina
permite hall
fracciones r
cionales que
se aproximan
a un decimal
dado en una
forma óptima

Utiliza el m
todo de las
reducidas de
fracciones.

La subrutina
va sucesivam
te calculand
reducidas, y
presentando
pantalla durante pausas
cada numerad
y cada denom
nador, su co
ciente y el
error entre
este cocient
y el decimal
dado.

Cuando el
error es cer
se presentan
nuevamente
los últimos

- -no se utilizan flags
- -se utilizan las etiquetas A,B,0,1,2,3,8,9
- - id. registros 0,1,2,3,4,5,6,7
- - id. en total 127 pasos de programa
- -se recomienda moda FIX 0
- - id. cualquier moda angular

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
usado	usado	usado	usado	usado	denomin	numerad	usado		
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
105	RCL 2	24. 2	
	x	61	numerador y de-
	+	51	nominador, y el
	STO 5	23. 5	programa se de-
	PAUSE	25.74	tiene.
110	/	71	
	FIX 9	14.11. 9	En cualquier fa
	PAUSE	25.74	se del cálculo
	RCL 8	24. 8	es posible dete-
	x⇄y	21	ner el programa
115	-	41	sin necesidad de
	PAUSE	25.74	esperar a que
	x= 0	15.71	el error sea
	GTO 8	22. 8	cero. Simplemen-
	RCL 0	24. 0	te ,pulsar R/S
120	RCL 3	24. 3	y despues GSB 8
	GTO 3	22. 3	y se presentaran
	* LBL 8	25.13. 8	el último numera
	FIX 0	14.11. 0	dor y denomina-
	RCL 6	24. 6	dor calculados.
125	PAUSE	25.74	
	RCL 5	24. 5	
	RTN	25.12	
130			
135			
140			
145			
150			
155			

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
160			
165			
170			
175			
180			
185			
190			
195			
200			
205			
210			

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
usado	usado	usado	usado	usado	denomin.	numerad.	usado		
.0	.1	.2	.3	.4					

ECUACION DE 4ª GRADO

1.- Descripción .- Dada una ecuación de grado 4, de la forma general

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

el programa halla simultaneamente todas sus raices, tanto reales como imaginarias, empleando un procedimiento no itera - tivo. Presenta grandes ventajas sobre la función $\boxed{\text{SOLVE}}$:

- halla simultaneamente (en 15 ó 20 segundos) todas las raices, reales o imaginarias, sin requerir ninguna aproximación inicial
- puede emplearse para resolver ecuaciones de 2º ó 3er grado: basta con multiplicar la ecuación por x^2, resolver, y descartar las raices que sean 0 . Veanse ejemplos en la otra página.
- si la ecuación es de 4º grado y el término x^4 no tiene coeficiente 1, basta dividir toda la ecuación por éste coeficiente.

el método empleado es el siguiente: se reduce la ec. a la forma

$$x^4+px^2+qx+ r = 0 \text{ ,siendo } \begin{array}{l} p=(c-6k^2)/2 \text{ , } q=2k(4k^2-c)+d \\ r=k(k(c-3k^2)-d)+e \text{ , } k = b/4 \end{array}$$

entonces, se resuelve la ec. cúbica : $a^3+ 2pa^2 + (p^2-r)a - q^2/8 = 0$
sea $\underline{a}$ una raiz real. Entonces:

$$\begin{cases} x_1^2 - \sqrt{2a}\, x_1 + (p + a + q/2\sqrt{2a}) = 0 \\ x_1^2 + \sqrt{2a}\, x_1 + (p + a - q/2\sqrt{2a}) = 0 \end{cases}$$

son las dos ecuaciones de 2º grado que hay que resolver. Se obtienen 4 raices (reales o imaginarias) x_1, y de ellas:

$$x = x_1 - k$$

la ecuac. cúbica se resuelve asi: Sea $B = 2p$, $C = p^2-r$, $D = -q^2/8$
entonces:

se reduce a $z^3+Pz+Q = 0$, donde $P = C-B^2/3$
$Q = D +B(2B^2/27-C/3)$

y su raiz es : - si $(Q/2)^2+(P/3)^3 \geqslant 0$

$$z = \sqrt[3]{(-Q/2)+\sqrt{(Q/2)^2+(P/3)^3}} + \sqrt[3]{(-Q/2) - \sqrt{(Q/2)^2+(P/3)^3}}$$

si $(Q/2)^2+(P/3)^3 < 0$, entonces $z = 2\sqrt{-P/3}\, \cos(\frac{1}{3}\arccos \frac{3Q}{2P}\sqrt{-3/P})$

y finalmente , $a = z - B/3$

2.- Utilización .-

(1) Introducir el programa

(2) Introducir los coeficientes: b $\boxed{\text{STO 0}}$; c $\boxed{\text{STO 1}}$; d $\boxed{\text{STO 2}}$; e $\boxed{\text{STO}}$

(3) Resolver la ec.: $\boxed{\text{A}}$ → a) si las raices son reales:

→ x_1 $\boxed{\text{R/S}}$ → x_2 $\boxed{\text{R/S}}$ → x_3 $\boxed{\text{R/S}}$ → x_4

en caso de que cualquiera de los dos pares sean (o los dos) imaginarias, se presenta un "1" indicador durante una pausa

$\boxed{\text{A}}$ → (1.0000) → parte imaginaria $\boxed{\text{R/S}}$ → parte real

y las raices son x = part.real ± part. imaginaria i

(4) para otra ecuación, ir a (2)

3.- Ejemplos .-

11- Resolver la ecuación $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

-introducir el programa. $\boxed{f\ PRGM}$

- id. coeficientes: $-10\ \boxed{STO\ 0}$, $35\ \boxed{STO\ 1}$, $-50\ \boxed{STO\ 2}$, $24\ \boxed{STO\ 3}$

-hallar las raices: $\boxed{A} \rightarrow 4.0000$, $\boxed{R/S} \rightarrow 3.0000$, $\boxed{R/S} \rightarrow 2.0000$, $\boxed{R/S} \rightarrow 1.0000$

las raices son: $x_1 = 4.0000$, $x_2 = 3.0000$, $x_3 = 2.0000$, $x_4 = 1.0000$

12- Resolver la ecuación $x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 7x + 5 = 0$

-introd. coeficientes: $3\ \boxed{STO\ 0}$, $8\ \boxed{STO\ 1}$, $7\ \boxed{STO\ 2}$, $5\ \boxed{STO\ 3}$

-hallar las raices:

$\boxed{A}$ - (1.0000) $\rightarrow$ 0.8660 $\boxed{R/S} \rightarrow -0.5000$
$\boxed{R/S}$ - (1.0000) $\rightarrow$ 2.0000 $\boxed{R/S} \rightarrow -1.0000$

asi que las 4 raices son imaginarias: $x_{1,2} = -0.5000 \pm 0.8660\ i$

$x_{3,4} = -1.0000 \pm 2.0000\ i$

13-Resolver la ecuación $x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0$

-introd. coeficientes: $-2\ \boxed{STO\ 0}$, $0\ \boxed{STO\ 1}$, $-1\ \boxed{STO\ 2}$, $2\ \boxed{STO\ 3}$

-hallar raices:

$\boxed{A} \rightarrow 2.0000$ $\boxed{R/S} \rightarrow 1.0000$
$\boxed{R/S} \rightarrow (1.0000) \rightarrow 0.8660$ $\boxed{R/S} \rightarrow -0.5000$

las raices son: $x_1 = 2.0000$, $x_2 = 1.0000$, $x_{3,4} = -0.5000 \pm 0.8660\ i$

14- Hallar todas las raices de $x^3 - 6x - 2 = 0$

-introducir coeficientes: la ec. es equivalente a $x^4 - 6x^2 - 2x = 0$

$0\ \boxed{STO\ 0}$, $-6\ \boxed{STO\ 1}$, $-2\ \boxed{STO\ 2}$, $0\ \boxed{STO\ 3}$

ahora: $\boxed{A} \rightarrow 2.6017$ $\boxed{FIX\ 9} \rightarrow 2.601679132$
$\boxed{R/S} \rightarrow 0.000000000$ $\boxed{R/S} \rightarrow -0.339876887$
$\boxed{R/S} \rightarrow -2.261802245$

y las raices(descartando el 0) son :

$x_1 = 2.601679132$
$x_2 = -0.339876887$, las 3 reales
$x_3 = -2.261802245$

4.- Notas .-

-el método puede fallar si la ecuación tiene una raiz múltiple
-la exactitud del resultado no depende del número de decimales en pantalla. El tiempo de ejecución es fijo, 15 a 20 segundos para hallar las 4 raices con 10 cifras de precisión.

HP 34 C

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE
*	LBL A	25.13.11
	RCL 1	24. 1
	RCL 0	24. 0
	4	4
5	÷	71
	STO I	23.14.23
	x^2	15. 3
	6	6
	x	61
10	-	41
	2	2
	÷	71
	STO 4	23. 4
	RCL I	24.14.23
15	x^2	15. 3
	4	4
	x	61
	RCL 1	24. 1
	-	41
20	RCL I	24.14.23
	x	61
	2	2
	x	61
	RCL 2	24. 2
25	+	51
	STO 0	23. 0
	RCL I	24.14.23
	RCL 1	24. 1
	RCL I	24.14.23
30	x^2	15. 3
	3	3
	x	61
	-	41
	x	61
35	RCL 2	24. 2
	-	41
	x	61
	STO+ 3	23.51. 3
	RCL 4	24. 4
40	x^2	15. 3
	RCL 3	24. 3
	-	41
	STO 1	23. 1
	RCL 4	24. 4
45	2	2
	x	61
	STO 2	23. 2
	x^2	15. 3
	3	3
50	÷	71
	-	41
	STO 3	23. 3
	RCL 2	24. 2
	x^2	15. 3
55	2	2

transforma la ecuación original a la forma reducida:

$x^4+px^2+qx+r = 0$

en la cual el término de tercer grado ha sido eliminado.

Esto se logra empleando las fórmulas:

$p=(c-6k^2)/2$

$q=2k(4k^2-c)+d$

$r=k(k(c-3k^2)-$

$-d)+e$

donde $k = b/4$

los nuevos coeficientes se almacenan en registros adecuados

ahora, tenemos que resolver la cúbica

$a^3+Ba^2+Ca+D=0$

donde :

$B= 2p$

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE
	x	61
	9	9
	÷	71
	RCL 1	24. 1
60	-	41
	RCL 2	24. 2
	x	61
	3	3
	STO÷ 3	23.71. 3
65	÷	71
	RCL 0	24. 0
	x^2	15. 3
	8	8
	÷	71
70	-	41
	2	2
	÷	71
	STO 1	23. 1
	x^2	15. 3
75	RCL 3	24. 3
	3	3
	STO÷ 2	23.71. 2
	y^x	25. 3
	+	51
80	x<0	15.41
	GTO 2	22. 2
	√x	14. 3
	STO 3	23. 3
	RCL 1	24. 1
	-	41
	GSB 1	13. 1
	RCL 1	24. 1
	CHS	32
	RCL 3	24. 3
90	-	41
	GSB 1	13. 1
	+	51
*	LBL 3	25.13. 3
	RCL 2	24. 2
95	-	41
	STO+ 4	23.51. 4
	2	2
	÷	71
	√x	14. 3
100	STO 1	23. 1
	STO÷ 0	23.71. 0
	GSB 6	13. 6
	R/S	74
*	LBL 6	25.13. 6

$C = p^2-r$

$D = -q^2/8$

se reduce a l forma :

$z^3+Pz+Q = 0$

siendo:

$P=C-B^2/3$

$Q=D+B(2B^2/27-$
$-C/3)$

y se calcula el discriminante:

$W=(Q/2)^2 +$
$+ (P/3$

si $W<0$, resol ver trigonom.

si no, la raiz es :

$z=(-Q/2+\sqrt{W})^{1/3}$

$(-Q/2-\sqrt{W})^{1/3}$

y de aqui:
$a = z - B/3$

con esta raiz a, se resuelven las dos ecuaciones de 2º grado:

-se utiliza el flag 0
- id. etiquetas A,1,2,3,4,6,8
- id. registros I,0,1,2,3,4
- id. en total 175 pasos de programa
-se recomienda moda FIX 4
- id. cualquier moda angular

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b, usad	c, usad	d, usado	e, usado	usado					
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
105	RCL 1	24. 1	$x_1^2-Fx_1+G = 0$
	x^2	15. 3	y
	RCL 4	24. 4	$x_1^2+Fx_1+L = 0$
	-	41	donde $F=\sqrt{2a}$.
	RCL 0	24. 0	$G=p+a+q/2\sqrt{2a}$
110	CHS	32	$L=p+a-q/2\sqrt{2a}$
	STO 0	23. 0	
	4	4	
	/	71	
	+	51	
115	x<0	15.41	
	GTO 4	22. 4	las raices son reales, y se calculan con la fórmula de la ecuación de 2º grado.
	$\sqrt{x}$	14. 3	
	STO 2	23. 2	
	RCL 1	24. 1	
120	CHS	32	
	STO 1	23. 1	
	CHS	32	
	+	51	
	GSB 8	13. 8	entonces:
125	R/S	74	
	RCL 1	24. 1	$x = X_1-k$
	CHS	32	
	RCL 2	24. 2	
	-	41	
130	GTO 8	22. 8	
	* LBL 4	25.13. 4	las raices son imaginarias: antes de calcularlas se presenta un 1 durante una pausa, para indicar qe son imaginarias. Luego se presentan parte imaginaria y parte real por este orden.
	CHS	32	
	$\sqrt{x}$	14. 3	
	1	1	
135	PAUSE	25.74	
	$x\gtrless y$	21	
	R/S	74	
	RCL 1	24. 1	
	CHS	32	
140	STO 1	23. 1	
	CHS	32	
	* LBL 8	25.13. 8	
	RCL I	24.14.23	
	-	41	
145	RTN	25.12	
	* LBL 1	25.13. 1	esta subrutina calcula la raiz cúbica de un número real positivo o negativo. Utiliza el flag 0 para decidir si cambia o no el signo.
	x<0	15.41	
	SF 0	25.51. 0	
	ABS	25.34	
150	3	3	
	1/x	25. 2	
	y^x	25. 3	
	F? 0	25.71. 0	
	CHS	32	
155	CF 0	25.61. 0	
	RTN	25.12	
	* LBL 2	25.13. 2	halla una raiz de la ecuación
	RCL 1	24. 1	
	RCL 3	24. 3	

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
160	1/x	25. 2	cúbica por medio de la formula trigonométrica:
	CHS	32	
	$\sqrt{x}$	14. 3	
	STO 1	23. 1	
	x	61	$z=2\sqrt{-P/3}\cos J$
165	RCL 3	24. 3	
	/	71	
	$\cos^{-1}$	15. 8	donde 3J =
	3	3	$=\arccos(\frac{3Q}{2P}\sqrt{-3/P}$
	/	71	
170	COS	14. 8	
	RCL 1	24. 1	
	/	71	
	2	2	
	x	61	
175	GTO 3	22. 3	
180			
185			
190			
195			
200			
205			
210			

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b, usado	c, usado	d, usado	e, usado	usado					
.0	.1	.2	.3	.4					

SISTEMAS DE ECUACIONES : $f(x,y) = 0$ $g(x,y) = 0$

1.- Descripción .- Tenemos un sistema de dos ecuaciones, no necesariamente lineales, de la forma genérica

$$f(x,y) = 0 \quad , \quad g(x,y) = 0$$

donde f, g , son funciones de $\underline{x}$ e $\underline{y}$ definidas por el usuario. Partiendo de una aproximación inicial (x_0,y_0) , el programa halla las soluciones del sistema (reales) , x, y .

Se emplea un método iterativo de Newton:

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \delta_{x_i} \\ y_{i+1} &= y_i + \delta_{y_i} \end{aligned}\right\} \text{ siendo } \delta_{x_i} = \frac{\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}} \quad , \quad \delta_{y_i} = \frac{\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}$$

donde $f = f(x_i,y_i)$
$g = g(x_i,y_i)$,

$$f_x = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]_{x_i,y_i} \simeq \frac{f(x_i,y_i)-f(x_i-\Delta x,y_i)}{\Delta x}$$

$$f_y = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]_{x_i,y_i} \simeq \frac{f(x_i,y_i)-f(x_i,y_i-\Delta y)}{\Delta y}$$

$$g_x = \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right]_{x_i,y_i} \simeq \frac{g(x_i,y_i)-g(x_i-\Delta x,y_i)}{\Delta x}$$

$$g_y = \left.\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right]_{x_i,y_i} \simeq \frac{g(x_i,y_i)-g(x_i,y_i-\Delta y)}{\Delta y}$$

$\Delta x = 8.10^{-4} = \Delta y$

$e = 10^{-8}$

se itera hasta que se cumple $\dfrac{|\delta_{x_i}|+|\delta_{y_i}|}{|x_{i+1}|+|y_{i+1}|} < \varepsilon$

2.- Utilización .- Introducir el programa

(1) Definir f,g : $\boxed{\text{GTO 0}}$,p.a.PRGM , introducir la lista de instrucciones que calculan f(x,y) , $\boxed{\text{RTN}}$, p.a. RUN

$\boxed{\text{GTO 1}}$,p.a.PRGM , introducir la lista de instrucciones que calculan g(x,y) , $\boxed{\text{RTN}}$, p.a. RUN

Es esencial que f(x,y) , g(x,y) , esten definidas con su correspondiente LBL al principio y RTN al final. Ademas, antes de definir nuevas f, g , es preciso borrar de la memoria de programa las anteriores.

Para defihir f, g , $\underline{x}$ está en X y en R0
$\underline{y}$ está en Y y en R1

y es posible utilizar los registros disponibles desde R.0 en adelante. Hay 38 pasos para definir f,g .

(2) Introducir aproximaciones iniciales, y calcular la solución:

x_0 $\boxed{\text{ENTER}}$ y_0 $\boxed{\text{A}}$ $\rightarrow (x_1) \rightarrow (y_1)$

$\rightarrow (x_n) \rightarrow (y_n) \rightarrow x_n$

x_n queda en X , y_n en Y

(3) Para probar con otras aproximaciones iniciales (Para buscar otra soluciones ,por ejemplo), ir a (2) . para otro caso , ir a (1)

3.- Ejemplos .-

(1)-Hallar un punto de intersección entre la circunferencia de ecuación :

$$x^2+y^2-5x+y-6=0$$

y la hipérbola $x^2-y^2+5x-y-2=0$ cercano al (1,1)

-definimos f(x,y) y g(x,y) : $\boxed{GTO\ 0}$,p.a.PRGM , $\boxed{x^2}$ $\boxed{x\rightleftarrows y}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{RCL}$

$\boxed{5}$ $\boxed{x}$ $\boxed{-}$ $\boxed{RCL\ 1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{6}$ $\boxed{-}$ $\boxed{RTN}$,p.a.RUN

$\boxed{GTO\ 1}$,p.a.PRGM, $\boxed{x^2}$ $\boxed{x\rightleftarrows y}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{RCL\ 0}$ $\boxed{5}$ $\boxed{x}$ $\boxed{+}$ $\boxed{RCL\ 1}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{RTN}$

p.a.RUN

-introducimos la aprox. inicial: 1 $\boxed{ENTER}$ 1 $\boxed{A}$ → (2.5006) → (3.5010)
→ (2.0500) → (3.3217)
→ (2.0006) → (3.0048)
→ (2.0000) → (2.9997)
→ (2.0000) → (3.0000)

y despues de mostrar (2.0000) → (3.0000) durante 5 iteraciones más, el programa se detiene con 2.0000 en la pantalla

la intersección será : $\boxed{FIX\ 9}$ → 2.000000000 (x_{int})
$\boxed{x\rightleftarrows y}$ → 2.999999993 (y_{int})

es decir, el punto (2,3) ,que es la verdadera intersección

(2) Hallar una raiz de la ecuación $2^x-3x+2+4i=0$

-suponemos la raiz $r=x+yi$. La ecuación se transforma en :

$2^{x+yi}-3(x+yi)+2+4i=0$ .Puesto que $2^{x+yi}=2^x(\cos y\text{Ln}2+i\,\text{sen}\,y\text{Ln}2$

esto queda como : $2^x(\cos y\text{Ln}2+i\,\text{sen}\,y\text{Ln}2)-3x-3yi+2+4i=0$

y separando las partes real e imaginaria, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 3x-2^x\cos(y\text{Ln}2)-2=0 \\ 3y-2^x\text{sen}(y\text{Ln}2)-4=0 \end{cases}$$

que es un sistema de 2 ec. no lineales con 2 incógnitas, x,y , reales

-definimos las ecuaciónes: primero borramos las anteriores:

$\boxed{f\ PRGM}$,p.a.PRGM, $\boxed{h\ BST}$, y $\boxed{h\ DEL}$ hasta llegar al paso 103

$\boxed{3}$ $\boxed{x}$ $\boxed{2}$ $\boxed{RCL\ 0}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{RCL\ 1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{Ln}$ $\boxed{x}$ $\boxed{cos}$ $\boxed{x}$ $\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{RTN}$

$\boxed{LBL\ 1}$ $\boxed{x\rightleftarrows y}$ $\boxed{3}$ $\boxed{x}$ $\boxed{2}$ $\boxed{RCL\ 0}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{RCL\ 1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{Ln}$ $\boxed{x}$ $\boxed{sin}$ $\boxed{x}$ $\boxed{-}$ $\boxed{4}$ $\boxed{-}$ $\boxed{RTN}$,p.a.RUN

-fijamos FIX 4 y RAD : $\boxed{FIX\ 4}$ $\boxed{RAD}$
-probamos con (1,1):

1 $\boxed{ENTER}$ 1 $\boxed{A}$ → (1.1795) → (1.7593) →
→ (0.9265) → (2.0422) →
→ (0.7646) → (1.9593) →
→ (0.7862) → (1.8869) → (0.8161) → (1.8884) → (0.8186) → (1.9002) →
→ (0.8142) → (1.9024) → (0.8129) → (1.9009) → (0.8133) → (1.9002) →
→ (0.8137) → (1.9004) → (0.8136) → (1.9005) → (0.8136) → (1.9005) →

y despues de varias iteraciones más se llega a x = 0.813591019
y = 1.900471318

y por consiguiente, la raiz es $r = 0.813591019 + 1.900471318\,i$

HP 34 C

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL A	25.13.11	Ciclo general
	SF 0	25.51. 0	se pone el flag
	STO 1	23. 1	0 en posición de
	x⇄y	21	convergencia no
5	STO 0	23. 0	alcanzada, y al-
	GSB 0	13. 0	macena los valo-
	STO 2	23. 2	res iniciales, o
	STO 6	23. 6	los resultados
	STO 7	23. 7	de la anterior
10	RCL 1	24. 1	iteración
	RCL 0	24. 0	
	GSB 1	13. 1	
	STO 3	23. 3	
	STO 8	23. 8	
15	STO 9	23. 9	
	RCL 1	24. 1	
	RCL 0	24. 0	
	8	8	$\Delta x = 8.10^{-4}$
	EEX	33	
20	4	4	
	CHS	32	
	STO 5	23. 5	Δx en R_5
	-	41	
	STO 4	23. 4	$x - \Delta x$ en R4
25	GSB 0	13. 0	
	STO- 6	23.41. 6	$f(x,y)-f(x-\Delta,y)$ en R6
	RCL 1	24. 1	
	RCL 4	24. 4	
	GSB 1	13. 1	
30	STO- 8	23.41. 8	$g(x,y)-g(x-\Delta,y)$ en R8
	RCL 5	24. 5	
	STO/ 6	23.71. 6	
	STO/ 8	23.71. 8	f_x en R6
	RCL 1	24. 1	
35	8	8	g_x en R8
	EEX	33	
	4	4	Δy en R5
	CHS	32	
	STO 5	23. 5	
40	-	41	
	STO 4	23. 4	$y - \Delta y$ en R4
	RCL 0	24. 0	
	GSB 0	13. 0	
	STO- 7	23.41. 7	$f(x,y)-f(x,y-\Delta)$ en R7
45	RCL 4	24. 4	
	RCL 0	24. 0	
	GSB 1	13. 1	
	STO- 9	23.41. 9	$g(x,y)-g(x,y-\Delta)$ en R9
	RCL 5	24. 5	
50	STO/ 7	23.71. 7	
	STO/ 9	23.71. 9	
	RCL 3	24. 3	
	RCL 7	24. 7	
	x	61	
55	RCL 2	24. 2	

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	RCL 9	24. 9	$\begin{vmatrix} -f & f_y \\ -g & g_y \end{vmatrix}$
	x	61	
	-	41	
	RCL 6	24. 6	
60	RCL 9	24. 9	
	x	61	
	RCL 7	24. 7	$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$
	RCL 8	24. 8	
	x	61	
65	-	41	
	STO 5	23. 5	
	/	71	δx
	STO+ 0	23.51. 0	
	ABS	25.34	$x = x + \delta x$
70	STO 4	23. 4	$\lvert\delta x\rvert$ en R4
	RCL 2	24. 2	
	RCL 8	24. 8	
	x	61	
	RCL 3	24. 3	
75	RCL 6	24. 6	$\begin{vmatrix} f_x & -f \\ g_x & -g \end{vmatrix}$
	x	61	
	-	41	
	RCL 5	24. 5	
	/	71	
80	STO+ 1	23.51. 1	δy
	ABS	25.34	$y = y + \delta y$
	STO+ 4	23.51. 4	$\lvert\delta_x\rvert + \lvert\delta_y\rvert$ en R4
	RCL 4	24. 4	
	RCL 1	24. 1	
	ABS	25.34	
	RCL 0	24. 0	$e_i = \dfrac{\lvert\delta_x\rvert+\lvert\delta_y\rvert}{\lvert x\rvert+\lvert y\rvert}$
	ABS	25.34	
	+	51	
	/	71	
90	EEX	33	si $e_i < 10^{-8}$, se
	CHS	32	
	8	8	coloca el flag
	x>y	14.51	en posición de
	CF0	25.61. 0	convergencia a
95	RCL 0	24. 0	canzada
	PAUSE	25.74	
	RCL 1	24. 1	
	PAUSE	25.74	muestra x e
	F? 0	25.71. 0	
100	GTO A	22.11	itera si aún n
	x⇄y	21	hay convergenc
	RTN	25.12	
*	LBL 0	25.13. 0	f(x,y)
*	LBL 1	25.13. 1	g(x,y)

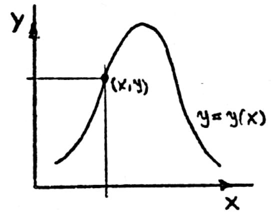
- se utiliza el flag 0
- id. etiquetas A,1,0
- id. registros 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- id. en total 102 pasos de programa + f,g
- se recomiendan modos FIX 4 y RAD

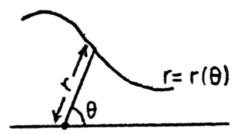
REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	y	f	g	usado	usado	fx	fy	gx	gy
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

AREAS, LONGITUDES, VOLUMENES

1.- Descripción .- Dada la ecuación de una curva expresada en coordenadas rectangulares , $y = y(x)$, o en polares , $r = r(\theta$ el presente programa permite hallar diversas medidas geométricas relativas a esa curva, así como evaluar su derivada en cualquier punto. A continuación se dan detalles de las diferentes subrutinas





-- todas las subrutinas utilizan la función $\boxed{\int_y^x}$, por lo cual la precisión y el tiempo de cálculo dependen grandemente del nº de decimales en pantalla; se recomienda FIX 4.

-- la mayor parte de ellas utilizan la su rutina $\boxed{B}$ para el cálculo de la deriv da.

a) Derivación : $y'(x)$

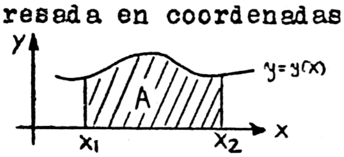
Muchas de las rutinas de integración requieren e cálculo de la derivada. Esto se realiza en una forma aproximada, empl ando la fórmula:

$$y'(x) \doteq (y(x+\Delta)-y(x-\Delta))/2\Delta \text{ ,donde } \Delta = 8.10^{-4}$$

esto da un mínimo de 6 decimales de precisión. El valor de y' queda al macenado en RO ,además de presentarse en pantalla . (por supuesto,,si la función es $r=r(\theta)$, se calcula $r'(\theta)$)

b) Area encerrada por una curva $y(x)$

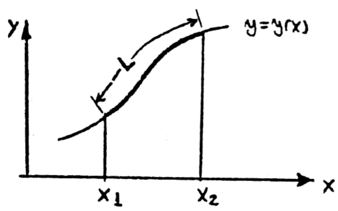
Calcula el area encerrada por una curva $y=y(x)$,e presada en coordenadas rectangulares, entre 2 límites arbitrarios x_1,:



Simplemente emplea la fórmula

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y(x)\, dx$$

c) Longitud de arco de una curva $y(x)$

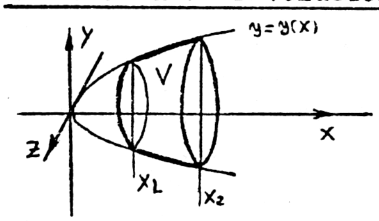


Calcula la longitud de arco de una curva $y(x)$ expresada en c.rectangulares, entre 2 límites arbitrarios x_1,x_2. Utiliza la fórmula:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx$$

$y(x)$ & $y'(x)$ deben ser continuas en (x_1,x_2)

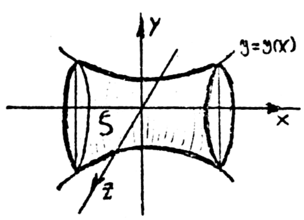
d) Volumen de revolución engendrado por $y(x)$



Calcula el volumen del sólido de revolución e gendrado por la curva $y(x)$,expresada en c.rec tangulares,al girar alrededor del eje XX' ent 2 límites arbitrarios x_1,x_2 .Utiliza

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2\, dx$$

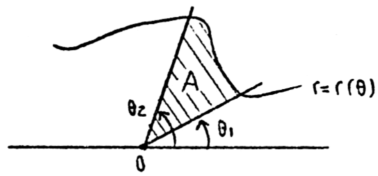
e) Area de revolución engendrada por $y(x)$



Calcula el area de la superficie de revolució engendrada por $y(x)$ (c.rect), al girar alrededor del eje XX', entre 2 límites, x_1, x_2. Usa:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

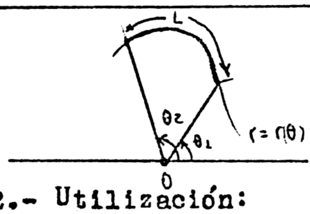
f) Area encerrada por una curva $r=r(\theta)$



Calcula el area encerrada por una curva $r=r(\theta)$ expresada en coordenadas polares, y 2 ángulos arbitrarios (argumentos, mas bien), θ_1 y θ_2. Utiliza la fórmula:

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

g) Longitud de arco de una curva $r=r(\theta)$



Calcula la longitud de arco de una curva $r=r(\theta$ expresada en coordenadas polares, entre 2 argumentos arbitrarios, θ_1 y θ_2: utiliza la fórmula:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (r')^2} \, d\theta$$

2.- Utilización:

(1) definir $y(x)$ ó $r(\theta)$; pulsar $\boxed{\text{GTO A}}$, pasar a PRGM, e introducir l secuencia de teclas que calcula $y(x)$ ó $r(\theta)$, teniendo en cuenta que el argumento se encuentra en pantalla al c mienzo, y que el resultado final debe quedar también allí. Al final de la secuencia, pulsar $\boxed{\text{h RTN}}$. La función no debe emplear $\boxed{\int}$ y debe ser continua en el intervalo de integración. Antes de introducir otra función es preciso borrar de la memoria la anterior utilizando $\boxed{\text{DEL}}$ hasta llegar a 076-25.13.11 (LBL A). Pasar a RUN.

(2) una vez definida la función, las siguientes subrutinas están disponibles:

(3) para hallar $y(x)$ (ó $r(\theta)$) para un valor dado de x (ó θ):

$$x \ (\text{ó } \theta)\ \boxed{A} \rightarrow y(x)\ (\text{ó } r(\theta))$$

(4) para hallar $y'(x)$ (ó $r'(\theta)$) para un valor dado x (ó θ):

$$x \ (\text{ó } \theta)\ \boxed{B} \rightarrow y'(x)\ (\text{ó } r'(\theta))$$

(5) id. area entre $y(x)$ y dos argumentos, x_1, x_2:

$$x_1 \boxed{\text{ENTER}}\, x_2 \boxed{\text{GSB } 7} \rightarrow \text{Area}$$

(6) id. longitud de arco de $y(x)$ entre x_1, x_2:

$$x_1 \boxed{\text{ENTER}}\, x_2 \boxed{\text{GSB } 8} \rightarrow \text{Longitud}$$

(7) id. volumen de revoluc. entre x_1, x_2, engendrado por $y(x)$:

$$x_1 \boxed{\text{ENTER}}\, x_2 \boxed{\text{GSB } 9} \rightarrow \text{Volumen}$$

(8) id. area de la sup. de revolución engendrada por $y(x)$, entre x_1, x_2

$$x_1 \boxed{\text{ENTER}}\, x_2 \boxed{\text{GSB } 6} \rightarrow \text{Superficie}$$

(9) id. area entre $r(\theta)$ y dos argumentos θ_1 y θ_2:

$$\theta_1 \boxed{\text{ENTER}}\, \theta_2 \boxed{\text{GSB } 4} \rightarrow \text{Area}$$

(10) id. longitud de arco de $r(\theta)$ entre dos argumentos, θ_1 y θ_2:

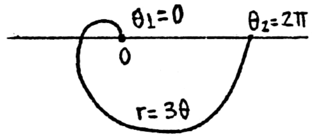
$$\theta_1 \boxed{\text{ENTER}}\, \theta_2 \boxed{\text{GSB } 5} \rightarrow \text{Longitud}$$

(11) para cualquier otro cálculo, ir al paso adecuado.

-en todos los casos, la incertidumbre del resultado está en Y

3.- Ejemplos .-

(1) - Hallar la longitud de la primera voluta de la espiral de Arquímedes definida por su ecuación en polares: $r = 3\theta$

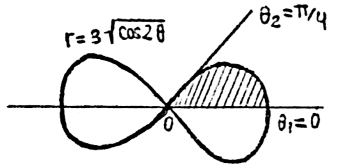


-introducir el programa
-pulsar $\boxed{\text{GTO A}}$; pasar a PRGM → 076-25.13.11
-introducir $r(\theta)$:
$\boxed{3}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{RTN}}$ → 079- 25 12
-pasar a RUN
-pulsar $\boxed{\text{FIX 4}}$
-introducir límites: 0 $\boxed{\text{ENTER}}$ 2 $\boxed{\text{GSB 5}}$ → 63.7689

luego es $L = 63.7689$;el error máximo es

$\boxed{x \rightleftarrows y}$ → 0.0003 . En realidad, el valor exacto es 63.768882 ,y el error no supera 9.10^{-6}.

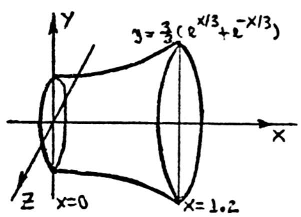
(2) - Area encerrada por un cuarto de voluta de la lemniscata $r=3\sqrt{\cos}$



-pulsar $\boxed{\text{h RTN}}$;pasar a PRGM → 000- ; $\boxed{\text{h BST}}$
-pulsar $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta llegar a 076-25.13.11
-introducir $r(\theta)$:
$\boxed{2}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{COS}}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{RTN}}$ →
→ 083- 25 12
-pasar a RUN ; pulsar $\boxed{\text{g RAD}}$
-introducir límites: 0 $\boxed{\text{ENTER}}$ $\pi/4$ $\boxed{\text{GSB 4}}$ → 2.250

es decir, $A = 2.2500$, con error máximo: $\boxed{x \rightleftarrows y}$ → $3.9270.10^{-5}$

(3) - Volumen del sólido obtenido por la revolución de la catenaria $y = 3(e^{x/3} + e^{-x/3})/2$ entre $x= 0$ y $x = 1.2$

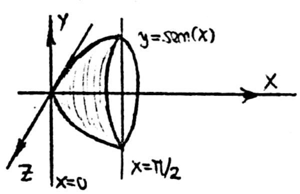


-pulsar $\boxed{\text{h RTN}}$; pasar a PRGM → 000- ; $\boxed{\text{h BST}}$
-pulsar $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta llegar a 076-25.13.11
-introducir $y(x)$: $\boxed{3}$ $\boxed{/}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$
$\boxed{.}$ $\boxed{5}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{RTN}}$ → 087- 25 12

-pasar a RUN
-introducir límites: 0 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1.2 $\boxed{\text{GSB 9}}$ → 35.797

luego $V=35.7976$, con e.máx: $\boxed{x \rightleftarrows y}$ → 0.0001 (en realidad, 3.10^{-7})

(4) - Area de la superficie de revolución engendrada por $y=\text{sen}(x)$ al girar alrededor de XX', entre $x=0$ y $x= \pi/2$



-pulsar $\boxed{\text{h RTN}}$;pasar a PRGM → 000- ; $\boxed{\text{h BST}}$
-pulsar $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta llegar a 076-25.13.11
-introducir $y(x)$:
$\boxed{\text{SIN}}$ $\boxed{\text{RTN}}$,pasar a RUN
-pulsar $\boxed{\text{gRAD}}$:
-introducir límites: 0 $\boxed{\text{ENTER}}$ $\pi/2$ $\boxed{\text{GSB 6}}$ → 7.2118

así que $S = 7.2118$, con e.máx: $\boxed{x \rightleftarrows y}$ → 0.0001 (realmente, 2.10^{-7}

(5) - Hallar valores de $y(x)$ y de $y'(x)$ para $x = 0$, 0.5 , 1 , siendo $y(x) = \exp(-x^2)$

-pulsar $\boxed{\text{h RTN}}$;pasar a PRGM → 000- ;pulsar $\boxed{\text{h BST}}$, y despues $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta llegar a 076-25.13.11
-introducir la función $y(x)$: $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{\text{RTN}}$ → 080- 25 12
-pasar a RUN

0 $\boxed{A}$ → 1.0000 ($y(0)$); 0 $\boxed{B}$ → 0.0000 ($y'(0)$)
0.5 $\boxed{A}$ → 0.7788 ($y(1/2)$); 0.5 $\boxed{B}$ → -0.7788 ($y'(0.5)$)
1 $\boxed{A}$ → 0.3679 ($y(1)$); 1 $\boxed{B}$ → -0.7358 ($y'(1)$)

HP 34 C

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL 7	25.13. 7	calcula el area bajo una curva en rectangular.
	$\int_y^x$ A	14.72.11	
	RTN	25.12	
*	LBL 8	25.13. 8	calcula longitud en rectangular.
5	$\int_y^x$ 0	14.72. 0	
	RTN	25.12	
*	LBL 0	25.13. 0	calcula $\sqrt{1+(y')^2}$
	GSB B	13.12	
	1	1	
10	R→P	15. 4	
	RTN	25.12	
*	LBL 9	25.13. 9	calcula el vol. de revolución en rectangular.
	π	25.73	
	GTO 9	22. 9	
15 *	LBL 4	25.13. 4	calcula el area encerrada por una curva expresada en coordenadas polares
	.	73	
	5	5	
*	LBL 9	25.13. 9	
	STO I	23.14.23	
20	R↓	15.22	
	$\int_y^x$ 1	14.72. 1	
	RTN	25.12	
*	LBL 1	25.13. 1	calcula πy^2 ó $y^2/2$
	GSB A	13.11	
25	x^2	15. 3	
	RCL I	24.14.23	
	x	61	
	RTN	25.12	
*	LBL 5	25.13. 5	longitud de una curva en polares
30	$\int_y^x$ 2	14.72. 2	
	RTN	25.12	
*	LBL 2	25.13. 2	calcula $\sqrt{r^2+(r')^2}$
	STO I	23.14.23	
	GSB B	13.12	
35	RCL I	24.14.23	
	GSB A	13.11	
	RCL 0	24. 0	
	R→P	15. 4	
	RTN	25.12	
40 *	LBL 6	25.13. 6	area de la superficie de revol.en rect.
	$\int_y^x$ 3	14.72. 3	
	RTN	25.12	
*	LBL 3	25.13. 3	calcula $2\pi y\sqrt{1+(y')^2}$
	STO I	23.14.23	
45	GSB A	13.11	
	x≷I	14.21	
	GSB B	13.12	
	1	1	
	R→P	15. 4	
50	RCL I	24.14.23	
	x	61	
	2	2	
	x	61	
	π	25.73	
55	x	61	

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	RTN	25.12	
*	LBL B	25.13.12	calcula la derivada de y ó de r, de acuerdo con l fórmula $y' \simeq \frac{y(x+\Delta)-y(x}{2\Delta}$ donde $\Delta = 8.10^{-4}$ el resultado queda en pantalla y en RC
	STO 2	23. 2	
	8	8	
60	EEX	33	
	CHS	32	
	4	4	
	STO 1	23. 1	
	STO+ 1	23.51. 1	
65	STO- 2	23.41. 2	
	+	51	
	GSB A	13.11	
	STO 0	23. 0	
	RCL 2	24. 2	
70	GSB A	13.11	
	STO- 0	23.41. 0	
	RCL 1	24. 1	
	STO÷ 0	23.71. 0	
	RCL 0	24. 0	
75	RTN	25.12	
*	LBL A	25.13.11	calcula y(x) ó r(θ), dond el argumento encuentra en pa talla, y el re sultado debe qu dar también en ella. la función no debe emplear más de 111 pasos de program
	RTN	25.12	
80			
85			
90			
95			
100			

-se utilizan etiquetas A,B,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- id. registros I,0,1,2
-no se utiliza ningun flag
-se utilizan en total 77 pasos de programa
-se recomienda moda FIX 4 (o inferior: FIX 3, etc)
- id. moda RAD

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y'	usado	usado							
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

INTEGRALES DOBLES : $\int_{x_0}^{x_m}\int_{y_0}^{y_m} f(x,y)\,dy\,dx$

1.- Descripción .- La potente función $\boxed{\int_y^x}$ incorporada en la HP-34C permite el cálculo de integrales simples, de la forma genérica

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sin embargo, $\boxed{\int_y^x}$ no puede ser utilizada en forma recursiva, es decir, no puede utilizarse para calcular la integral de una función que a su vez viene expresada por una integral , lo cual imposibilita el cálculo de integrales dobles (o múltiples, en general) de la forma

$$\int_{x_0}^{x_m}\int_{y_0}^{y_m} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x_0}^{x_m}\left[\int_{y_0}^{y_m} f(x,y)\,dy\right]dx$$

Este programa utiliza la función $\boxed{\int_x^y}$ conjuntamente con un método gaussiano para calcular integrales dobles. Tengamos la integral doble:

$$I = \int_{x_0}^{x_m}\int_{y_0}^{y_m} f(x,y)\,dy\,dx$$

el programa utiliza $\boxed{\int_x^y}$ para calcular $\int_{y_0}^{y_m} f(x,y)dy$, y el siguiente método numérico para, a su vez, calcular la integral doble total :

—tengamos $\int_a^b g(x)dx$, entonces, el intervalo (a,b) se reduce al (-1,1) mediante el cambio de variable $x = (b+a)/2 + (b-a)/2 \cdot t$, $dx = \frac{1}{2}(b-a)dt$ y la integral resultante, :

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \frac{1}{9}\left(8g(0) + 5\cdot(g(\sqrt{0.6}) + g(-\sqrt{0.6}))\right)$$

este es el método de Gauss de 3 puntos, y es exacto si g(x) es un polinomio de grado 5 ó menos. Este método es, con mucho, el mejor que existe para ser implementado en una calculadora programable: exige únicamente 3 evaluaciones de g(x) para dar una exactitud de 5º orden, sus coeficientes numéricos son extremadamente simples, y puede ser programado en un mínimo espacio de memoria, requiriendo únicamente 3 registros de almacenamiento. (En contraste, la regla de Simpson también requiere 3 evaluaciones de g(x) y sus coeficientes son muy sencillos, pero sólo es exacta para g(x) = polinomio de grado 3 ó menos, por consiguiente nuestro método es casi el doble de exacto)

2.- Utilización .- Introducir el programa

(1) definir f(x,y) : $\boxed{\text{GTO B}}$, pasar a PRGM , pulsar la secuencia de teclas que calcula f(x,y) , $\boxed{\text{RTN}}$, pasar a RUN

-para definir f(x,y) debe tenerse en cuenta que x se encuentra en R5 , y y se encuentra en X (en pantalla)

(2) almacenar el nº de subintervalos : m $\boxed{\text{STO I}}$

(3) Calcular la integral: x_0 $\boxed{\text{ENTER}}$ x_m $\boxed{\text{ENTER}}$ y_0 $\boxed{\text{ENTER}}$ y_n $\boxed{\text{A}}$ → Integ.

(4) Para otro caso con la misma f(x,y) , ir a (2)

(5) Para otra f(x,y), ir a (1) , despues de borrar la anterior

3.- Notas .- La precisión del cálculo depende de dos factores: la moda FIX N ó SCI N que se elija, y el número m de subintervalos Se recomienda muy encarecidamente el seleccionar FIX ó SCI con 4 decimales ó menos (FIX 4 ó SCI 4) ,y m = 1 ó 2 : esto proporcionará una exactitud de 4 decimales o así en un tiempo moderado. Si se requiere mayor exactitud, elegir m = 3 ó mayor , y en ultima instancia, FIX 6 ó SCI 6 . Téngase en cuenta que al pasar de m = 1 a m = 2 , el tiempo de cálculo se duplica como mínimo , y que seleccionar FIX 6 en vez de FIX 4 duplica o triplica el tiempo de funcionamiento. Veanse ejemplos para una idea de la efectividad del método.

4.- Ejemplos .-

(1) Hallar $I = \int_0^1 \int_1^2 (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

-definimos f(x,y) : $\boxed{\text{GTO B}}$,p.a.PRGM , $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{RCL 5}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{RTN}}$ p.a.RUN

-probamos con 1 subintervalo , y FIX 4 : $\boxed{\text{FIX 4}}$ 1 $\boxed{\text{STO I}}$

-calculamos I : 0 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 2 $\boxed{\text{A}}$ $\rightarrow$ 2.6667

$\boxed{\text{FIX 7}}$ $\rightarrow$ 2.6666666 , luego $\underline{\underline{I = 2.6666666}}$ (exacto, I = 8/3)

-el resultado es muy exacto, porque el método de Gauss lo es para polinomios de grado 5 ó menos, y f(x,y) = polinómio de grado 2

(2) Hallar $I = \int_3^4 \int_1^2 (x+y)^{-2}\, dy\, dx$

-definimos f(x,y) : primero hay que borrar la anterior :

$\boxed{\text{f PRGM}}$, p.a.PRGM , $\boxed{\text{h BST}}$,y ahora $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta llegar al paso 067

$\boxed{\text{RCL 5}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\text{RTN}}$, p.a.RUN

-ahora, 1 subint. , y FIX 4: $\boxed{\text{FIX 4}}$ 1 $\boxed{\text{STO I}}$

-calculamos I : 3 $\boxed{\text{ENTER}}$ 4 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 2 $\boxed{\text{A}}$ $\rightarrow$ 0.0408

$\boxed{\text{FIX 6}}$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{0.040821}}$. Exacto = ln(25/24) = 0.040822

(3) Hallar : $\int_{-2.3}^{1.6} \int_{3.9}^{6.1} (e^{-x^2} + x^3 - y^3x^2 + 7).\mathrm{arctg}(x-2).\sin(y+3)\, dy\, dx$

-definimos f(x,y) : $\boxed{\text{f PRGM}}$,p.a.PRGM , $\boxed{\text{h BST}}$, ahora $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta llegar al paso 067

$\boxed{\text{STO 9}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{\text{RCL 5}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{RCL 5}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{LASTX}}$ $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{x \rightleftharpoons y}$ $\boxed{-}$
$\boxed{7}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{RCL 5}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{RCL 9}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{SIN}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{RTN}}$,p.a.RUN

-con 2 subint.,y SCI 4 : $\boxed{\text{SCI 4}}$ $\boxed{\text{RAD}}$ 2 $\boxed{\text{STO I}}$

-calculamos: -2.3 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1.6 $\boxed{\text{ENTER}}$ 3.9 $\boxed{\text{ENTER}}$ 6.1 $\boxed{\text{A}}$ $\rightarrow$ $1.3213.10^3$

$\boxed{\text{FIX 2}}$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{1321.27}}$. El valor exacto es 1321.27

este problema era especialmente dificil por varios motivos: la f(x,y) tarda 6 segundos en ser evaluada , lo cual incrementa mucho el tiempo de cálculo. Ademas, el intervalo de integración es bastante grande, y eso afecta a la precisión. Pese a ello, se han obtenido 6 cifras significativas correctas. Este mismo ejemplo resuelto mediante un método similar en una HP-67, tardó 2 horas.

(4) Hallar $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\, dy\, dx$ (Aparece en Probabilidades)

-definimos f(x,y) : $\boxed{\text{f PRGM}}$, p.a.PRGM , $\boxed{\text{h BST}}$, y $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta llegar al paso 067
$\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{RCL 5}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{\text{RTN}}$, p.a. RUN

-usamos 3 subint. , FIX 4 : $\boxed{\text{FIX 4}}$ 3 $\boxed{\text{STO I}}$

-calculamos: 0 $\boxed{\text{ENTER}}$ 4 $\boxed{\text{ENTER}}$ 0 $\boxed{\text{ENTER}}$ 4 $\boxed{\text{A}}$ $\rightarrow$ 0.7853 $\left(= \int_0^4 \int_0^4 e^{-x^2-y^2} dy\, dx\right)$

el resultado exacto es $\pi/4$ = 0.7854 . Como puede verse, hemos sustituido la integral entre límites infinitos por una aproximación entre límites finitos.

HP 34 C

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL A	25.13.11	
	STO 3	23. 3	almacena
	R↓	15.22	y_n en R3
	STO 4	23. 4	y_o en R4
	R↓	15.22	
	x⇄y	21	
	STO 6	23. 6	prépara la in-
	-	41	tegración de
	RCL I	24.14.23	los m subin-
	/	71	tervalos
	STO 7	23. 7	
	RCL 8	24. 8	
	STO- 8	23.41. 8	
*	LBL 2	25.13. 2	integral de un
	RCL 6	24. 6	subintervalo
	RCL 6	24. 6	$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\int_{y_0}^{y_m} f(x,y)\,dy\,dx$
	RCL 7	24. 7	
	STO+ 6	23.51. 6	
	+	51	
	STO 0	23. 0	realiza el
	x⇄y	21	cambio de va-
	STO- 0	23.41. 0	riable que
	+	51	convierte
	2	2	(x_0, x_m) en
	STO/ 0	23.71. 0	(-1,1)
	/	71	
	STO 1	23. 1	cálculo de
	GSB 0	13. 0	la integral
	+	51	en cada sub-
	GSB 1	13. 1	intervalo
	STO 2	23. 2	según el méto-
	RCL 1	24. 1	do de Gauss
	GSB 0	13. 0	de 3 puntos
	-	41	
	GSB 1	13. 1	realiza las
	STO+ 2	23.51. 2	3 evaluacio-
	5	5	nes de la se-
	STO× 2	23.61. 2	gunda integral
	RCL 1	24. 1	que son nece-
	GSB 1	13. 1	sarias.
	8	8	
	x	61	la instrucción
	STO+ 2	23.51. 2	DSE comprueba
	RCL 0	24. 0	si es preciso
	STO× 2	23.61. 2	calcular otro
	9	9	subintervalo.
	STO/ 2	23.71. 2	En caso con-
	RCL 2	24. 2	trario, para.
	STO+ 8	23.51. 8	
	DSE	15.23	
	GTO 2	22. 2	
	RCL 8	24. 8	
	RTN	25.12	
*	LBL 0	25.13. 0	
	RCL 0	24. 0	

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	.	73	subrutina
	6	6	auxiliar
	√x	14. 3	
	x	61	
	RTN	25.12	
*	LBL 1	25.13. 1	subrutina auxi-
	STO 5	23. 5	liar, calcula
	RCL 4	24. 4	la segunda in-
	RCL 3	24. 3	tegral
	$\int_y^x$ B	14.72.12	$\int_{y_0}^{y_m} f(x,y)\,d$
	RTN	25.12	
*	LBL B	25.13.12	f(x,y)

-no se utiliza ningun flag
-se utilizan las etiquetas A,B,0,1,2
- id. registros I,0,1,2,3,4,5,6,7,8
- id. en total 66 pasos de programa+f(x,:
-se recomiendan modas FIX 4 ó SCI 4 y RAD

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
usado	usado	I_{subin}	y_n	y_0	x_1	x_k	increm	Integ.	
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

SUMACION DE SERIES INFINITAS ALTERNADAS

1.- Descripción .- Dada una serie alternada infinita (los signos de los sucesivos términos van alternando de positivo a negativo) , cuyo término general es definido por el usuario (en un máximo de 35 pasos) , éste programa calcula su suma muy rapidamente , utilizando la transformación de Euler con diferencias hasta el 7º orden.

El programa calcula la suma de una serie infinita de la forma general

$$S = y(0) - y(1) + y(2) - y(3) + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i y(i) \qquad , i=0,1,2,\ldots$$

es sumamente util cuando la serie converge muy lentamente hacia su límite, como por ejemplo la serie

$$S = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots = \mathrm{Ln}\ 2$$

serían necesarios 2000 términos para hallar Ln 2 con 3 decimales correctos; sumar 2000 términos llevaría un tiempo bastante largo. Por contraste, el presente programa puede hallar esta suma (u otra cualquiera) con 10 cifras de precisión en 1 minuto ó menos.

Se emplea la transformación de Euler : reemplaza la serie original por

$$S = 1/2\ y(0) - 1/4\,\Delta y(0) + 1/8\,\Delta^2 y(0) - \ldots$$

donde las $\Delta^n y(0)$ son las diferencias de n-ésimo órden de y(i). Pueden usarse diferencias hasta de 7º órden. Este procedimiento es particularmente eficaz en el caso de series muy lentamente convergentes, y se aplica no a la serie original, sino a la que resulta de restarle a ésta la suma de unos pocos primeros términos.

El programa procede asi: teniendo el término general de la serie definido bajo LBL B (35 pasos como máximo) , n términos de la serie son sumados de antemano (n es elegido por el usuario) para dar S'. Entonces, se forma una tabla de diferencias:

$$\begin{array}{ccccc}
y(n+1) & & & & \\
 & \Delta y(n+1) & & & \\
y(n+2) & & \Delta^2 y(n+1) & & \\
 & \Delta y(n+2) & & \Delta^3 y(n+1) & \ldots\ldots \\
y(n+3) & & \ldots\ldots & & \\
 & \ldots\ldots & & & \\
\ldots\ldots & & & &
\end{array}$$

calculando diferencias hasta el m-ésimo órden ($1 \leq m \leq 7$).Finalmente, se aplica la transformación de Euler para dar

$$S'' = \frac{1}{2} y(n+1) - \frac{1}{4}\Delta y(n+1) + \frac{1}{8}\Delta^2 y(n+1) - \ldots$$

y la suma final es $S = S' + S''$

2.- Utilización .- Introducir el programa

(1) definir el término general y(i): $\boxed{\text{GTO B}}$,p.a.PRGM , pulsar la secuencia de teclas que calcula y(i) , $\boxed{\text{RTN}}$,p.a.RUN

(2) introducir el nº de términos a sumar de antemano = SUM (≥ 0) y el nº de diferencias a calcular = DIF ($1 \leq$ DIF ≤ 7)

SUM $\boxed{\text{ENTER}}$ DIF $\boxed{\text{A}}$ $\rightarrow$ S

(3) para otros valores de SUM ó DIF , ir a (2). Para otro caso,a (1

3.- Notas .- -se recomiendan valores de SUM = DIF = 7, para obtener máxima precisión. SUM puede ser mayor que 7, incluso 10 ó más.
-la precisión y el tiempo de funcionamiento dependen de SUM, DI
-la transformación de Euler es más efectiva con series muy lentamente convergentes. Series divergentes pueden ser sumadas e algunos casos: la suma obtenida se llama "suma de Euler" de l serie divergente.

4.- Ejemplos .-

(1) Hallar Ln 2 = 1- 1/2 + 1/3- 1/4+ ... hasta 10 cifras decimales

-definimos $y(i) = 1/(1+i)$: $\boxed{\text{GTO B}}$, p.a.PRGM, $\boxed{1}\boxed{+}\boxed{1/x}$ $\boxed{\text{RTN}}$, p.a.RUN

-utilizaremos 10 términos previos y 7 diferencias : SUM = 10, DIF=7

$\boxed{\text{FIX 9}}$ 10 $\boxed{\text{ENTER}}$ 7 $\boxed{\text{A}}$ → 0.693147182 (Ln 2 = 0.693147181)

(2) Hallar $S = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta\, dk}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} = 1/1^2 - 1/3^2 + 1/5^2 - \dots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{(2i+}$

-definimos y(i) : primero, hay que borrar la anterior y(i)

$\boxed{\text{f PRGM}}$, p.a.PRGM, $\boxed{\text{h BST}}$, y ahora $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta llegar al paso 084

$\boxed{2}$ $\boxed{x}$ $\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{RTN}}$, p.a.RUN

-SUM = 8 , DIF = 7 : 8 $\boxed{\text{ENTER}}$ 7 $\boxed{\text{A}}$ → 0.915965595

el valor exacto es $S = \int_0^1 (\text{arctg } x)/x \, .dx = 0.915965594$

(3) Hallar el valor de S = 1/0.23 - 1/0.24 + 1/0.25 - 1/0.26+...

-el término general es : $S = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i . \frac{1}{0.23 + 0.01\, i}$

-lo definimos: $\boxed{\text{f PRGM}}$, p.a.PRGM,

$\boxed{\text{h BST}}$, $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta 084, $\boxed{\text{RCL .3}}$ $\boxed{x}$ $\boxed{\text{RCL .4}}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1/x}$ $\boxed{\text{RTN}}$, p.a.RUN

-almacenamos constantes: 0.01 $\boxed{\text{STO .3}}$ 0.23 $\boxed{\text{STO .4}}$

-SUM = DIF = 6 : 6 $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{\text{A}}$ → 2.221127525

el valor exacto es $S = 100 \int_0^1 t^{22}/(1+t) \, .dt = 2.221127525$

(4) Sumar la serie divergente S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +...

-el término general es : $S = \sum_0^{\infty} (-1)^i (1+i)$

-lo definimos: $\boxed{\text{f PRGM}}$, p.a.PRGM, $\boxed{\text{h BST}}$, $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta 084,

$\boxed{1}\boxed{+}$ $\boxed{\text{RTN}}$, p.a.RUN

-SUM = 0 , DIF = 1 : 0 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{A}}$ → 0.250000000

por supuesto, la serie carece de suma, pero consideremos la función y(x) cuyo desarrollo en serie es el siguiente:

$1/(1+x)^2 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$

Haciendo x = 1 en ambos miembros queda:

$1/4 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + = 0.25$

HP 34 C

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL A	25.13.11	
	CF 0	25.61. 0	
	STO .1	23..1	almacena SUM y
	x⇄y	21	DIF y prepara
5	STO .0	23..0	los contadores
	1	1	y los registros
	STO 8	23. 8	sumatoria
	0	0	
	STO 9	23. 9	
10	STO I	23.14.23	
*	LBL 1	25.13. 1	
	GSB B	13.12	calcula la suma
	RCL 8	24. 8	de los n prime-
	STO- 8	23.41. 8	ros términos de
15	STO- 8	23.41. 8	la serie alter
	x	61	nante
	STO+ 9	23.51. 9	
	ISG	15.24	
	FIX 4	14.11. 4	
20	RCL .0	24..0	
	RCL I	24.14.23	
	x≤y	14.41	efectua un test
	GTO 1	22. 1	para ver si se
	STO 8	23. 8	ha sumado un
25	2	2	número par o
	/	71	impar de termi
	FRAC	25.33	nos
	x≠0	15.61	
	SF 0	25.51. 0	
30	CL X	34	
	STO I	23.14.23	coloca el índi-
*	LBL 2	25.13. 2	ce a cero
	RCL 8	24. 8	
	GSB B	13.12	forma la tabla
35	STO (i)	23.14.24	de diferencias
	ISG	15.24	
	FIX 4	14.11. 4	esta parte cal-
	1	1	cula y almace-
	STO+ 8	23.51. 8	na y(n+1),etc
40	RCL .1	24..1	
	RCL I	24.14.23	
	x≤y	14.41	
	GTO 2	22. 2	
	2	2	
45	F? 0	25.71. 0	test de paridad
	CHS	32	
	STO 8	23. 8	
	ABS	25.34	
*	LBL 6	25.13. 6	calculo de las
50	-	41	
	STO I	23.14.23	
	STO .2	23..2	
*	LBL 0	25.13. 0	
	RCL (i)	24.14.24	
55	ISG	15.24	
	FIX 4	14.11. 4	
	STO-(i)	23.41.24	diferencias:so
	RCL .1	24..1	dos bucles ani
	RCL I	24.14.23	dados
60	x≠y	14.61	
	GTO 0	22. 0	control del 1e
	RCL .2	24..2	bucle
	STO I	23.14.23	
	x=0	15.71	
65	GTO 4	22. 4	
	1	1	control del 2º
	GTO 6	22. 6	bucle
*	LBL 4	25.13. 4	
	RCL (i)	24.14.24	transformación
70	RCL 8	24. 8	de Euler
	/	71	
	STO+ 9	23.51. 9	aquí se suman
	2	2	los términos d.
	CHS	32	diferencias qu
75	STOx 8	23.61. 8	constituyen en
	ISG	15.24	sí la transfor
	FIX 4	14.11. 4	mación, con el
	RCL .1	24..1	resultado de s
	RCL I	24.14.23	mar directamen
80	x≤y	14.41	los n primeros
	GTO 4	22. 4	términos.
	RCL 9	24. 9	
	RTN	25.12	La suma queda (
*	LBL B	25.13.12	R9

-se utiliza el flag 0
-se utilizan las etiquetas A,B,0,1,2,4,6
- id. registros I,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,.0,.1 y .2
- id. en total 84 pasos de programa
-se recomiendan modas FIX 4 y cualquiera angular

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y(n 1)	1ª dif	2ª dif	3ª dif	4ª dif	5ª dif	6ª dif	7ª dif	usado	Σ
.0 m= SUM	.1 m= DIF	.2 usado	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

ECUACIONES DIFERENCIALES : $y' = f(x,y)$

1.- Descripción .- Dada una ecuación diferencial de primer orden:

$$y' = f(x,y)$$

con condición inicial $x = x_0$, $y = y_0$, el presente programa permite hallar una solución numérica aproximada , esto es , permite determinar el valor de y_i para un conjunto discreto de puntos x_i igualmente espaciados.

Se emplea el método de Runge-Kutta de 4º orden :

$$x_{i+1} = x_i + h \quad , \quad y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

donde:

$$\left| \begin{aligned} k_1 &= h.f(x_i \ , \ y_i) \\ k_2 &= h.f(x_i + h/2 \ , \ y_i + k_1/2) \\ k_3 &= h.f(x_i + h/2 \ , \ y_i + k_2/2) \\ k_4 &= h.f(x_i + h \ , \ y_i + k_3) \end{aligned} \right.$$

el error es proporcional a h^5, por tanto, cuanto menor sea el espaciado h, tanto más exacta será la solución. Se recomienda h = 0.1 ó inferior.

2.- Utilización .- Introducir el programa

(1) definir f(x,y) bajo LBL 1 : $\boxed{\text{GTO 1}}$, PRGM , f(x,y) , RUN

f(x,y) es una secuencia de teclas que calcula f(x,y), teniendo en cuenta que al principio, x está en X y en R1 , y está en Y y R2

(2) introducir el espaciado h : h $\boxed{\text{B}}$

(3) introducir los valores iniciales x_0, y_0 :

x_0 $\boxed{\text{ENTER}}$ y_0 $\boxed{\text{A}}$ $\rightarrow (x_i) \rightarrow (y_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

(4) para modificar algo, ir al paso adecuado (2), (3)

(5) para otro caso, ir a (1)

3.- Notas .-

Al definir f(x,y) debe prestarse especial atención a :

- la subrutina que calcula f(x,y) debe estar encabezada por $\boxed{\text{LBL 1}}$ y terminada por $\boxed{\text{RTN}}$.
- antes de introducir una nueva f(x,y) es preciso borrar la anterior (si la hubiere) de la memoria de programa. Para ello sígase el procedimiento que a continuación se expone:

1) en moda RUN, pulsar $\boxed{\text{f PRGM}}$. Pasar a moda PRGM

2) pulsar $\boxed{\text{h BST}}$, y ahora, pulsar $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta llegar a 067-25.13.1

3) teclear la nueva f(x,y) y al final, pulsar $\boxed{\text{h RTN}}$

4.- Ejemplos .-

(1) Hallar una solución numérica de $y' = y$ con condición inicial $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. La solución será un conjunto de valores (x,y) para x = 0, 0.1 , 0.2 , ... , 1

- definimos f(x,y) = y : $\boxed{\text{GTO 1}}$,pasar a moda PRGM , $\boxed{\text{g R}\downarrow}$ $\boxed{\text{h RTN}}$, pasar a moda RUN

- espaciado h = 0.1 : 0.1 $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{FIX 5}}$

- condiciónes iniciales: 0 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{A}}$ → se forma la tabla:

x	y
0.10000	1.10517
0.20000	1.22140
0.30000	1.34986
0.40000	1.49182
0.50000	1.64872
0.60000	1.82212
0.70000	2.01375
0.80000	2.22554
0.90000	2.45960
1.00000	2.71828

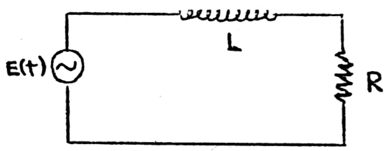
y exacta
1.10517
1.22140
1.34986
1.49182
1.64872
1.82212
2.01375
2.22554
2.45960
2.71828

la solución exacta es:

$$y = e^x$$

como puede verse la solución calculada coincide hasta 5 decimales con la sol. exacta en (0,1)

(2) Tenemos un circuito R, L , como el de la figura. En él , se tiene:



R = 15 ohmios
L = 3 henrios

$E(t) = E_0 \text{sen } wt = 110 \text{ sen } 120\pi t$

En el instante inicial, el circuito se encuentra abierto. Se cierr: y entonces, se pide estudiar el régimen transitorio durante los 10 primeros milisegundos. Comparar con la solución exacta.

-la ecuación diferencial que satisface el circuito es:

$$3 \frac{di}{dt} + 15\, i = 110 \text{ sen } 120\pi t$$

donde i = intensidad instantánea , t = tiempo en segundos con la condición inicial t= 0 , i = 0 (circuito abierto)

-la definimos: $\boxed{\text{f PRGM}}$, pasar a moda PRGM , $\boxed{\text{h BST}}$, y ahora, pulsamos $\boxed{\text{h DEL}}$ hasta llegar a 067-25.13. 1

ahora, pulsar $\boxed{\text{RCL 6}}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{SIN}}$ $\boxed{\text{RCL 7}}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{x \rightleftharpoons y}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{RTN}}$

pasar a moda RUN

-almacenar constantes: 120 $\boxed{\pi}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{STO 6}}$ 110 $\boxed{\text{ENTER}}$ 3 $\boxed{/}$ $\boxed{\text{STO 7}}$
-fijar modas: $\boxed{\text{ENG 2}}$ $\boxed{\text{RAD}}$

-el espaciado , h = 0.001 : 0.001 $\boxed{\text{B}}$
-condiciones iniciales: 0 $\boxed{\text{ENTER}}$ 0 $\boxed{\text{A}}$ → resulta la tabla

t (ms)	1 ms	2 ms	3 ms	4 ms	5 ms	6 ms	7 ms	8 ms	9 ms	10 ms
i (mA)	6.82	26.3	55.6	90.5	126	157	180	190	187	170

la sol. exacta es $i = \frac{22}{3} \frac{(\text{sen}120\pi t - 24\pi \cos 120\pi t + 24\pi e^{-5t}}{1 + 576\pi^2}$

HP 34 C

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL B	25.13.12	almacena h en R0
	STO 0	23. 0	
	R↓	15.22	
	RTN	25.12	
5 *	LBL A	25.13.11	
	STO 4	23. 4	comienzo:
	R↓	15.22	
	STO 3	23. 3	almacena x_0 en 3
*	LBL 2	25.13. 2	y_0 en 4
10	RCL 4	24. 4	
	STO 2	23. 2	y_i
	RCL 3	24. 3	
	STO 1	23. 1	x_i
	GSB 1	13. 1	$f(x_i, y_i)$
15	RCL 0	24. 0	
	x	61	k_1
	STO 5	23. 5	
	2	2	
	/	71	
20	RCL 4	24. 4	
	+	51	$y_i + k_1/2$
	STO 2	23. 2	
	RCL 0	24. 0	
	2	2	
25	/	71	
	RCL 3	24. 3	
	+	51	$x_i + h/2$
	STO 1	23. 1	
	GSB 1	13. 1	$f(x_i + h/2, y_i + \frac{k_1}{2})$
30	RCL 0	24. 0	
	x	61	k_2
	STO + 5	23.51. 5	
	STO + 5	23.51. 5	
	2	2	
35	/	71	
	RCL 4	24. 4	
	+	51	$y_i + k_2/2$
	STO 2	23. 2	
	RCL 1	24. 1	
40	GSB 1	13. 1	$f(x_i + h/2, y_i + \frac{k_2}{2}$
	RCL 0	24. 0	
	x	61	k_3
	STO + 5	23.51. 5	
	STO + 5	23.51. 5	
45	RCL 4	24. 4	
	+	51	
	STO 2	23. 2	$y_i + k_3$
	RCL 0	24. 0	
	RCL 3	24. 3	
50	+	51	
	STO 1	23. 1	
	GSB 1	13. 1	
	RCL 0	24. 0	
	STO + 3	23.51. 3	
55	x	61	

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	STO + 5	23.51. 5	$\Sigma = k_1 + 2k_2 + 2k_3 +$
	6	6	
	STO/ 5	23.71. 5	
	RCL 5	24. 5	
60	STO + 4	23.51. 4	$y_{i+1} = y_i + \Sigma/6$
	RCL 3	24. 3	
	PAUSE	25.74	x_{i+1}
	RCL 4	24. 4	
	PAUSE	25.74	y_{i+1}
65	PAUSE	25.74	
	GTO 2	22. 2	otro punto
*	LBL 1	25.13. 1	$f(x,y)$

- no se utiliza ningun flag
- se utilizan las etiquetas A, B, 1, 2
- id. registros 0, 1, 2, 3, 4, 5
- id. 67 pasos de programa + f(x,y)
- se recomiendan modas FIX 4, RAD

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h	x	y	xi	yi	Σ				
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

SISTEMAS DE EC. DIFERENCIALES : $y' = f(x,y,z)$, $z' = g(x,y,z)$

1.- Descripción .- Con este programa puede resolverse numéricamente un sistema formado por 2 ecuaciones diferenciales de 1^er orden , de la forma

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y,z) \\ z' = g(x,y,z) \end{array}\right\} \text{con condición inicial } x = x_0 \text{ , } y = y_0 \text{ , } z = z_0$$

Se utiliza el método generalizado de Runge-Kutta de 4º orden:

$$x_{i+1} = x_i + h \text{ , } y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \text{ , } z_{i+1} = z_i + (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)/6$$

siendo:

$$\left|\begin{array}{lll} k_1 = h.f(x_i, y_i, z_i) & , & l_1 = h.g(x_i, y_i, z_i) \\ k_2 = h.f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}) & , & l_2 = h.g(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}) \\ k_3 = h.f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}) & , & l_3 = h.g(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}, z_i + \frac{l_2}{2}) \\ k_4 = h.f(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3) & , & l_4 = h.g(x_i + h, y_i + k_3, z_i + l_3) \end{array}\right.$$

La precisión depende de h^5: cuanto menor h , mejor . Se recomienda usar $h = 0.1$ ó inferior.

Con este programa pueden resolverse también ecuaciones diferenciales de 2º orden , de la forma

$$y'' = g(x, y, y') \text{ , } x = x_0 \text{ , } y = y_0 \text{ , } y' = y'_0$$

basta reducir la ecuación a un sistema mediante el cambio $y' = z$:

quedará : $$\left.\begin{array}{l} y' = z \\ z' = g(x,y,z) \end{array}\right\} \text{con condición } x = x_0 \text{ , } y = y_0 \text{ , } z = z_0 = y'_0$$

2.- Utilización .- Introducir el programa

(1) Definir $f(x,y,z)$ bajo LBL 1 : [GTO 1] ,pasar a PRGM , pulsar la secuencia de teclas que calcula $f(x,y,z)$, [h RTN] , pasar a RUN

(2) Definir $g(x,y,z)$ bajo LBL 2 : [GTO 2] ,pasar a PRGM , pulsar la secuencia de teclas que calcula $g(x,y,z)$, [h RTN] , pasar a RUN

en ambos casos, x está en X y R1, y está en Y y R2, z en Z y R3

(3) Introducir el espaciado h : h [B]

(4) id. condiciones iniciales: x_0 [ENTER] y_0 [ENTER] z_0 [A] → → (x_1) → (y_1) → (z_1)

(5) Para cambiar h, ó condiciones iniciales, ir al paso adecuado

(6) Para otro caso, ir a (1)

3.- Notas .-

- $f(x,yz)$ y $g(x,y,z)$ deben estar perfectamente encabezadas por su etiqueta respectiva (LBL 1 ó 2) y finalizadas con RTN
- no deben emplear ni alterar el contenido de R0 a R9
- antes de definir nuevas f, g, es esencial borrar de la memoria las anteriores ; f, g, conjuntamente, no deben sobrepasar 33 pasos de memoria, incluyendo sus LBL y RTN .

4.- Ejemplos .-

(1) Resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} y' = 3\cos x + z \\ z' = \ \ \ \operatorname{sen} x + y \end{array}\right\}$ $y(0) = 1$, $z(0) = -1$

en el intervalo (0 , 0.25) con incrementos h = 0.05

-definimos f : [GTO 1], pasar a PRGM , [COS] [3] [x] [RCL 3] [+] [RTN]
pasar a RUN

-definimos g : [GTO 2], pasar a PRGM , [SIN] [+] [RTN] pasar a RUN

-fijamos las modás: [RAD] [FIX 6]

-el espaciado h: 0.05 [B]

-las c.iniciales: 0 [ENTER] 1 [ENTER] -1 [A] → se forma la tabla:

x	y	z
0.050000	1.101250	-0.946229
0.100000	1.205004	-0.884837
0.150000	1.311273	-0.815708
0.200000	1.420072	-0.738730
0.250000	1.531429	-0.653799

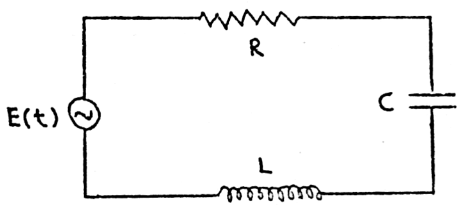
-la solución exacta es :

$y = e^x + \operatorname{sen} x$

$z = e^x - 2\cos x$

los valores calculados coinciden con los exactos hasta 6 decimales

(2) Un circuito RLC tiene R=180 ohm , C=1/280 faradios, L=20 henrios, y un voltaje aplicado E(t)=10 sen t volt. Suponiendo que el condensador está inicialmente descargado, y que circula una intensidad de 1 Amp. antes de aplicar el voltaje (t=0), estudiar la carga resultante en el condensador al aplicar voltaje, en el periodo desde t=0 hasta t=0.3 segundos, y ver su valor máximo .



$E(t) = RI + L\dfrac{dI}{dt} + \dfrac{q}{C}$; $\dfrac{dq}{dt} = I$; $\dfrac{d^2q}{dt^2} = \dfrac{dI}{dt}$

y se llega al sistema $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{E(t)}{L} - \dfrac{RI}{L} - \dfrac{q}{LC}$, $\dfrac{dq}{dt} = I$

que en nuestro caso es $\dfrac{dI}{dt} = 0.5 \operatorname{sen} t - 9\,I - 14\,q$; $\dfrac{dq}{dt} = I$

con condiciones iniciales: I(0) = 1 ; q(0) = 0 .

-las definiciones de f,g son: LBL 1,SIN,2,/,x⇄y,9,x,-,x⇄y,14,x,-,RTN
LBL 2,x⇄y,RTN

-fijamos [RAD] [FIX 3] y el espaciado h: 0.025 [B]
-condiciones iniciales : 0 [ENTER] 1 [ENTER] 0 [A] → la tabla :

t	I	q	t	I	q	t	I	q
0.025	0.795	0.022	0.125	0.272	0.072	0.225	0.035	0.086
0.050	0.625	0.040	0.150	0.194	0.078	0.250	0.001	0.087
0.075	0.484	0.054	0.175	0.129	0.082	0.275	-0.026	0.086
0.100	0.368	0.064	0.200	0.077	0.085	0.300	-0.048	0.085

-puede verse que el valor de q máximo es $q_{máx} = 0.087$ Coul. ,que se alcanza para t= 0.250 segundos, cuando la intensidad vale $I \simeq 0$

-la solución exacta es que,para t = 0.2575 seg., I = 0 , q = 0.087 Coul

HP 34 C

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL B	25.13.12	Almacena h en R0
	STO 0	23. 0	
	R↓	15.22	
	RTN	25.12	
5 *	LBL A	25.13.11	comienzo
	STO 6	23. 6	
	R↓	15.22	alamcena xo en R4
	STO 5	23. 5	yo en R5
	R↓	15.22	zo en R6
10	STO 4	23. 4	
*	LBL 3	25.13. 3	
	RCL 6	24. 6	
	STO 3	23. 3	z_i
	RCL 5	24. 5	
15	STO 2	23. 2	y_i
	RCL 4	24. 4	
	STO 1	23. 1	x_i
	GSB 1	13. 1	$f(x_i, y_i, z_i)$
	RCL 0	24. 0	
20	x	61	k_1
	STO 7	23. 7	
	STO 9	23. 9	
	RCL 3	24. 3	
	RCL 2	24. 2	
25	RCL 1	24. 1	
	GSB 2	13. 2	$g(x_i, y_i, z_i)$
	RCL 0	24. 0	
	x	61	
	STO 8	23. 8	
30	SF 1	25.51. 1	
*	LBL 4	25.13. 4	
	2	2	
	/	71	$l_1/2$ ó $l_2/2$
	RCL 6	24. 6	
35	+	51	
	STO 3	23. 3	
	RCL 9	24. 9	
	2	2	
	/	71	$k_1/2$ ó $k_2/2$
40	RCL 5	24. 5	
	+	51	
	STO 2	23. 2	
	RCL 0	24. 0	
	2	2	$h/2$
45	/	71	
	RCL 4	24. 4	
	+	51	
	STO 1	23. 1	
	GSB 1	13. 1	$f(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{k_1}{2}, z_i+\frac{l_1}{2})$
50	RCL 0	24. 0	
	x	61	
	STO+ 7	23.51. 7	
	STO+ 7	23.51. 7	
	STO 9	23. 9	
55	RCL 3	24. 3	

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	RCL 2	24. 2	
	RCL 1	24. 1	
	GSB 2	13. 2	$g(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{k_i}{2}, z_i+\frac{l_i}{2})$
	RCL 0	24. 0	
60	x	61	l_2
	STO+ 8	23.51. 8	
	STO+ 8	23.51. 8	
	CF 0	25.61. 0	comprueba si y
	F? 1	25.71. 1	ha calculado k
65	SF 0	25.51. 0	y l_3;si ya lo
	CF 1	25.61. 1	hecho sigue,si
	F? 0	25.71. 0	no, vuelve par
	GTO 4	22. 4	calcularlos
	RCL 6	24. 6	
70	+	51	$z_i + l_3$
	STO 3	23. 3	
	RCL 9	24. 9	
	RCL 5	24. 5	
	+	51	$y_i + k_3$
75	STO 2	23. 2	
	RCL 0	24. 0	
	RCL 4	24. 4	
	+	51	$x_i + h$
	STO 1	23. 1	
80	GSB 1	13. 1	$f(x_i+h, y_i+k_3, z_i+l_3$
	RCL 0	24. 0	
	x	61	
	STO+ 7	23.51. 7	
	RCL 3	24. 3	
	RCL 2	24. 2	
	RCL 1	24. 1	
	GSB 2	13. 2	$g(x_i+h, y_i+k_3, z_i+l_3$
	RCL 0	24. 0	
	STO+ 4	23.51. 4	$x_{i+1} = x_i + h$
90	x	61	
	STO+ 8	23.51. 8	
	6	6	
	STO/ 7	23.71. 7	
	STO/ 8	23.71. 8	
95	RCL 7	24. 7	$y_{i+1} = y_i + \Sigma/6$
	STO+ 5	23.51. 5	
	RCL 8	24. 8	
	STO+ 6	23.51. 6	$z_{i+1} = z_i + \Sigma/6$
	RCL 4	24. 4	
100	PAUSE	25.74	x_{i+1}
	RCL 5	24. 5	
	PAUSE	25.74	
	PAUSE	25.74	y_{i+1}
	RCL 6	24. 6	

-se utilizan los flags 0,1
- id. etiquetas A,B,1,2,3,4
- id. registros 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- id. en total 107 pasos de programa + f,g
-se recomiendan modas FIX 4 y RAD

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h	x	y	z	xi	yi	zi	Σk	Σl	k1,k2,...
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
105	PAUSE	25.74	
	PAUSE	25.74	
	GTO 3	22. 3	
*	LBL 1	25.13. 1	
*	LBL 2	25.13. 2	
110			
115			
120			
125			
130			
135			
140			
145			
150			
155			

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
160			
165			
170			
175			
180			
185			
190			
195			
200			
205			
210			

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h	x	y	z	xi	yi	zi	Σx	Σ	k1,k2,
.0	.1	.2	.3	.4					

OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS

1.- Descripción .- Este programa permite realizar operaciones aritméticas empleando números complejos, asi como varias de las funciones matemáticas más usuales, con argumentos complejos. Las operaciones se realizan de una forma muy similar a las habituales con números reales, utilizando un sistema que puede considerarse un RPN de dos registros: cada resultado es almacenado para poder ser utilizado en cálculos posteriores, permitiendo así la realización de operaciones en cadena, entre el complejo z_1 almacenado en el "registro superio y el complejo z_2 almacenado en "pantalla" (en realidad, en los registros X e Y del stack operativo). Las funciones de una sola variable actuan sobre el complejo en "pantalla" y como todas las demas, almacenan el resultado tanto en "pantalla" como en el "registro superior". El programa incluye una memoria "compleja", capaz de almacenar el complejo en "pantalla" en ella, y recuperarlo posteriormente.

A continuación, se dan detalles de las diferentes funciones disponibles, y de los algoritmos empleados:

SUMA: $z_1 + z_2$.- $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

- a partir de ahora llamaremos "Y" al "registro superior" y "X" al registro de "pantalla"
- con este convenio, $\boxed{\text{GSB 4}}$ realiza la suma del complejo en "Y" con el complejo en "X", y deja el resultado tanto en "X" como en "Y"

RESTA: $z_1 - z_2$.- $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$

$\boxed{\text{GSB 7}}$ realiza lo siguiente: al complejo en "Y" le resta el complejo en "X" y coloca el resultado tanto en "X" como en "Y"

MULTIPLICACION: $z_1 \times z_2$.- $z_1 x z_2 = e^{\ln z_1 + \ln z_2} = e^{(\ln r_1 + \ln r_2) + (\theta_1 + \theta_2) i} = A + B\, i$

$\boxed{\text{GSB 1}}$ multiplica el complejo en "Y" por el complejo en "X" y deja el resultado en "X" y en "Y"

DIVISION: z_1/z_2 .- $z_1/z_2 = e^{\ln z_1 - \ln z_2} = A + B\, i$

$\boxed{\text{GSB 0}}$ divide el complejo en "Y" por el complejo en "X" y deja el resultado en "X" y en "Y"

ELEVACION: $z_1^{z_2}$.- $z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1} = A + Bi$

$\boxed{\text{GSB 3}}$ eleva el complejo en "Y" a la potencia indicada por el complejo en "X" y deja el resultado en "X" y en "Y"

LOG.NEPERIANO: $\ln z$.- $\ln z = \ln r + \theta\, i = A + Bi$

$\boxed{\text{GSB 2}}$ halla el logaritmo del complejo en "X" . El resultado queda en "X" y en "Y"

EXPONENCIAL: e^z .- $e^z = e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b)$

$\boxed{\text{GSB 5}}$ eleva e (2.718...) a la potencia indicada por el complejo en "X" y deja el resultado en "X" e "Y"

SENO : sin(z) .- $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/2i = A + B\,i$

[GSB 9] halla el seno trigonométrico del complejo en el registro "X" y deja el resultado en "X" e "Y". El argumento se supone en radianes.

STO z .-

[GSB 8] almacena el complejo en "X" en el registro especial "M" (memoria) y deja "X" intacto. ("Y",por supuesto, no se ve afectado en absoluto)

RCL z .-

[B] recupera el complejo almacenado en "M" (memoria), dejandolo en "X".

ENTER z .-

[A] almacena el complejo en "X" en el registro "Y" , y deja "X" intacto.

Notas .-

"X" está formado por los registros X e Y del stack operativo: la parte real está en Y y la imaginaria en X

"Y" está formado por R0 y R1. La parte real está en R0 y la imaginaria en R1

"M" está formado por R2 y R3. La parte real está en R2 y la imaginaria en R3

(todos los datos se introducen como: p.real [ENTER] p.imag)

(todos los resultados se obtienen como: (P.real → P.imaginar.)

- las funciones $z_1^{z_2}$, e^z,Lnz , sin(z) utilizan moda trigonometrica RAD.

- todas las funciones muestran la parte real durante una PAUSA y se detienen con la p. imaginaria en pantalla. La parte real queda en Y (del stack)

-En realidad, el manejo del programa es muy simple de aprender: se tarda más en explicarlo de forma escrita que en entenderlo y dominarlo. Veanse ejemplos de utilización en la siguiente página.

2.- Utilización: -las funciones han sido asignadas a las diversas etiquetas con arreglo a sencillas reglas mnemotécnicas:

-las funciones aritmeticas (+,-,x,/) se emplean pulsando [GSB] y el número más cercano a su respectiva función real (+,-,x,/) .Ejemplo:"multiplicar"es [GSB porque el "1" es el número más cercano a "x".

-la función "elevación" está sobre su homónima "y^x" ,solo que prefijada con [GSB] en vez de con "h" . (es decir, es [GSB 3])

-la función "logaritmo" está sobre "LOG" pero prefijada con "GSB" en vez de con "f" (es decir, es "GSB 2" en vez de "f 2". Su inversa, la exponencial, está inmediatamente encima de ella.(es decir, es [GSB 5])

-la función "seno", está sobre la "TAN" real: esto es, es [GSB 9]

-la función "STO z" está sobre la tecla numérica más cercana a su homónima "STO" ,esto es, es [GSB 8].

-las dos funciones principales, "ENTER z" y "RCL z" son las teclas básicas [A] y [B], para mayor facilidad de uso.

-para utilizar cualquier función, recuerdese que el resultado de la misma siempre se presenta como :

→ (parte real) → parte imaginaria

es preciso esperar a que el programa se detenga. Tratar de ejecutar cualquier otra función antes de que la parte imaginaria del anterior resultado se presente en pantalla, puede conducir a resultados erroneos. Los tiempos de ejecución son muy breves.

3.- Ejemplos .-

(1)- Hallar $Ln(2+3i)$, e^{3+4i}, $sin(1+i)$, $(1-i)^{7+i}$

$Ln(2+3i)$: 2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 3 $\boxed{\text{GSB 2}}$ → (1.2825) → 0.9828 ⇨ = $\underline{1.2825 + 0.9828\ i}$

e^{3+4i} : 3 $\boxed{\text{ENTER}}$ 4 $\boxed{\text{GSB 5}}$ → (-13.1288) → -15.2008 ⇨ = $\underline{-13.1288-15.20}$

$sin(1+i)$: 1 $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{\text{GSB 9}}$ → (1.2985) → 0.6350 ⇨ = $\underline{1.2985 + 0.6350\ i}$

$(1-i)^{7+i}$: 1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{A}}$ → (1.0000) → -1.0000

7 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{GSB 3}}$ → (10.5429) → 22.4630 = $\underline{10.5429 + 22.4630}$

(2)- Ejemplo de operaciones en cadena:

Hallar $Ln\left\{\dfrac{[(2+3i)+(3-4i)+(6+8i)-(2-5i)]\ x\ (3-2i)+(3-i)}{(2-i)}\right\}$

2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 3 $\boxed{\text{A}}$ → (2.0000) → 3.0000 (introduce z_1 en "Y")

3 $\boxed{\text{ENTER}}$ 4 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{GSB 4}}$ → (5.0000) → -1.0000 (primera suma)

6 $\boxed{\text{ENTER}}$ 8 $\boxed{\text{GSB 4}}$ → (11.0000) → 7.0000 (segunda suma)

2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 5 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{GSB 7}}$ → (9.0000) → 12.0000 (la resta)

3 $\boxed{\text{ENTER}}$ 2 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{GSB 1}}$ → (51.0000) → 18.0000 (la multiplicación)

3 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{GSB 4}}$ → (54.0000) → 17.0000 (la suma)

2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{GSB 0}}$ → (18.2000) → 17.6000 (la división)

$\boxed{\text{GSB 2}}$ → (3.2315) → 0.7686 (el logaritmo)

y ya tenemos el resultado final: = $\underline{3.2315 + 0.7686\ i}$

(3)- Ejemplo de operaciones en cadena, con memoria

HALLAR $[(2+3i)+(6+2i)]\ x\ [(3-5i)+(2-4i)]$ .Primero, $\boxed{\text{FIX 0}}$

-introducir z_1: 2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 3 $\boxed{\text{A}}$ → (2) → 3

-introducir z_2: 6 $\boxed{\text{ENTER}}$ 2 (sumar) $\boxed{\text{GSB 4}}$ → (8) → 5

-almacenar el resultado parcial: $\boxed{\text{GSB 8}}$ → (8) → 5

-introducir z_1: 3 $\boxed{\text{ENTER}}$ 5 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{A}}$ → (3) → -5

-introducir z_2: 2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 4 $\boxed{\text{CHS}}$ (sumar) $\boxed{\text{GSB 4}}$ → (5) → -9

-recuperar el resultado parcial: $\boxed{\text{B}}$ → (8) → 5

-multiplicar ambos resultados : $\boxed{\text{GSB 1}}$ → (85) → -47

luego el resultado es : = $\underline{85 - 47i}$

(4)- Evaluar $P(z) = (2+i)z^5-(3+2i)z^4+(6-i)z^3-(2+3i)z^2-(1+i)z-(2+3i)$ para $z = -1+2i$

-almacenar z: 1 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$ 2 $\boxed{\text{A}}$ → (-1) → 2 (z almacenado en "Y"y

$\boxed{\text{GSB 8}}$ → (-1) → 2 en "M",y en "X",claro

-1ercoeficien: 2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{GSB 1}}$ → (-4) → 3 (multiplicado)

-2º coeficien: 3 $\boxed{\text{EBTER}}$ 2 $\boxed{\text{GSB 7}}$ → (-7) → 1 (restado)

-recuperar z : $\boxed{\text{B}}$ → (-1) → 2

-multiplicar : $\boxed{\text{GSB 1}}$ → (5) → -15

-3ercoeficien: 6 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{GSB 4}}$ → (11) → -16 (sumado)

-recuperar z ; $\boxed{\text{B}}$ → (-1) → 2

-multiplicar : $\boxed{\text{GSB 1}}$ → (21) → 38

-4º coeficien: 2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 3 $\boxed{\text{GSB 7}}$ → (19) → 35 (restado)

-recuparar z : $\boxed{\text{B}}$ → (-1) → 2

-multiplicar : $\boxed{\text{GSB 1}}$ → (-89) → 3

-5º coeficien: 1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{GSB 7}}$ → (-90) → 2 (restado)

-recuperar z : $\boxed{\text{B}}$ → (-1) → 2

-multiplicar : $\boxed{\text{GSB 1}}$ → (86) → -182

-6º coeficien: 2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 3 $\boxed{\text{GSB 7}}$ → (84) → -185 (restado)

que es el resultado final: $\underline{P(-1+2i) = 84 - 185\ i}$

HP 34 C

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	* LBL 7	25.13. 7	resta:
	CHS	32	$z_1 = a_1 + b_1 i$
	x⇄y	21	
	CHS	32	$z_2 = a_2 + b_2 i$
5	x⇄y	21	
	* LBL 4	25.13. 4	$z_1 - z_2 =$
	STO + 1	23.51. 1	
	x⇄y	21	$=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$
	STO + 0	23.51. 0	
10	RCL 0	24. 0	suma:
	RCL 1	24. 1	$z_1 + z_2 =$
	GTO A	22.11	
	* LBL 3	25.13. 3	$=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$
	SF 0	25.51. 0	
15	RCL 0	24. 0	elevación:
	RCL 1	24. 1	
	GSB 2	13. 2	$z_1^{z_2} = e^{z_2 \ln z_1}$
	STO 1	23. 1	
	R↓	15.22	
20	STO 0	23. 0	
	R↓	15.22	
	GSB 1	13. 1	
	* LBL 5	25.13. 5	exponenciación:
	RAD	15.12	
25	x⇄y	21	$e^z = e^a \cdot (\cos b$
	e^x	15. 1	
	P→R	14. 4	$+ i \operatorname{sen} b)$
	x⇄y	21	
	GTO A	22.11	
30	* LBL 2	25.13. 2	logaritmos:
	RAD	15.12	
	x⇄y	21	$\ln z = \ln r + i\theta$
	R→P	15. 4	donde r=módulo
	LN	14. 1	θ=argum.
35	* LBL 6	25.13. 6	
	x⇄y	21	
	F ? 0	25.71. 0	
	RTN	25.12	
	GTO A	22.11	
40	* LBL 0	25.13. 0	división:
	x⇄y	21	$z_1/z_2 = z_1 x 1/z_2$
	R→P	15. 4	
	1/X	25. 2	$1/z_2 = e^{-\ln z_2}$
	x⇄y	21	
45	CHS	32	
	x⇄y	21	
	GTO 6	22. 6	
	* LBL 1	25.13. 1	multiplicación:
	x⇄y	21	
50	R→P	15. 4	
	* LBL 6	25.13. 6	
	RCL 1	24. 1	
	RCL 0	24. 0	
	R→P	15. 4	
55	x⇄y	21	

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	R↓	15.22	$z_1 x z_2 =$
	x	61	
	R↓	15.22	$= e^{\ln z_1 + \ln z_2}$
	+	51	
60	R↑	14.22	
	P→R	14. 4	
	GTO 6	22. 6	
	* LBL B	25.13.12	recuperar memo
	RCL 2	24. 2	
65	RCL 3	24. 3	
	* LBL 8	25.13. 8	almacenar z en
	STO 3	23. 3	memoria:
	x⇄y	21	
	STO 2	23. 2	a queda en R2
70	PAUSE	25.74	b queda en R3
	x⇄y	21	
	RTN	25.12	
	* LBL 9	25.13. 9	seno de z :
	RAD	15.12	
75	e^x	15. 1	sen(z) =
	ENTER	31	
	1/X	25. 2	$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
	-	41	
	2	2	
80	/	71	en todos los c
	STO 0	23. 0	sos el resulta
	x⇄y	21	do de la opera
	STO 1	23. 1	ción queda al-
	COS	14. 8	macenado para
	x	61	su utilización
	RCL 0	24. 0	en operaciones
	1	1	posteriores
	R→P	15. 4	
	RCL 1	24. 1	
90	SIN	14. 7	
	x	61	
	R↑	14.22	
	* LBL A	25.13.11	ENTER z :
	CF 0	25.61. 0	
95	STO 1	23. 1	prepara las
	x⇄y	21	condiciones in
	STO 0	23. 0	ciales, y alma
	PAUSE	25.74	cena
	x⇄y	21	a en R0
100	RTN	25.12	b en R1

- se utiliza el flag 0
- id. registros 0,1,2,3
- id. etiquetas A,B,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- id. en total 100 pasos de programa
- se recomienda moda FIX 4
- id. moda RAD

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p.real	p.imag.	p.realm	p.imagm						
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

OPERACIONES VECTORIALES

1.- Descripción .- Con ayuda de este programa es posible realizar las operaciones vectoriales más corrientes , como son: suma y diferencia de vectores, productos escalar y vectorial, ángulo entre dos vectores, y módulo de un vector. Las operaciones están encadenadas, permitiendo un alto grado de complejidad.

Al igual que el programa "OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS " , éste permite simular un stack operativo vectorial, con 2 registros "X" e "Y" , aparte de una memoria vectorial "M" , capaz de almacenar y recuperar en un momento dado un vector.

Los vectores son de la forma $\bar{V} = x\,\bar{I} + y\,\bar{J} + z\,\bar{K}$ es decir, tridimensionales. Vectores en dos dimensiones pueden ser tratados también, basta introducir z = 0. Las operaciones de dos variables operan sobre ambos "X" e "Y" y almacenan el resultado en "Y" para posteriores operaciones, amén de presentarlo en "X" para su visualización.Si el resultado es un escalar (un número, no un vector), no es almacenado en "Y". Veanse detalles a continuación:

| "X" está formado por X,Y,Z del stack operativo normal
| "Y" id. id. por R0,R1,R2
| "M" id. id. por R5,R6,R7

SUMA : $\bar{V}_1 + \bar{V}_2$ - realiza la suma del vector en "Y" con el vector en "X", y deja el resultado en "X" y en "Y"

RESTA: $\bar{V}_1 - \bar{V}_2$ - al vector en "Y" le resta el vector en "X" ,y el resultado queda en "X" y en "Y"

P.VECTORIAL: $\bar{V}_1 x \bar{V}_2$ - halla el producto vectorial del vector en "Y" por el vector en "X" (en este orden) , y deja el resultado en "X" y en "Y"

P.ESCALAR : $\bar{V}_1 . \bar{V}_2$ - Realiza el producto escalar del vector en "Y" por el vector en "X", y el resultado queda en X (del stack normal)

ANGULO : $\varphi(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$ - Halla el ángulo entre el vector en "Y" y el vector en "X" y deja el resultado en X (del stack normal)

MODULO: /V/ - halla el módulo del vector en "X" y deja el resultado en X (del stack normal)

ENTER V : - Almacena el vector en "X" en el registro "Y" y deja "X" intacto

STO V : - Almacena el vector en "X" en "M" y deja "X" intacto

RCL V : - Recupera el vector almacenado en "M" , y lo deja en "X" , dejando "M" intacto

Notas .- -Todos los vectores se introducen como

x [ENTER] y [ENTER] z (y la tecla apropiada)

-todos los resultados vectoriales se obtienen como: (x) → (y) → z (z queda en X, y en Y , x en Z)

-las funciones han sido asignadas a etiquetas de acuerdo con reglas mnemotécnicas: ver el programa "OPERACIONES CON COMPLEJOS" .

2.- Utilización .-

(1) Introducir el programa

(2) para sumar vectores: $\overline{V1} + \overline{V2}$

-introducir $\overline{V1}$: x1 $\boxed{\text{ENTER}}$ y1 $\boxed{\text{ENTER}}$ z1 $\boxed{\text{A}}$ → (x1) → (y1) → z1
-introducir $\overline{V2}$: x2 $\boxed{\text{ENTER}}$ y2 $\boxed{\text{ENTER}}$ z2 $\boxed{\text{GSB4}}$ → (X) → (Y) → Z

(3) para restar vectores: $\overline{V1} - \overline{V2}$

-introducir $\overline{V1}$: x1 $\boxed{\text{ENTER}}$ y1 $\boxed{\text{ENTER}}$ z1 $\boxed{\text{A}}$ → (x1) → (y1) → z1
-introducir $\overline{V2}$: x2 $\boxed{\text{ENTER}}$ y2 $\boxed{\text{ENTER}}$ z2 $\boxed{\text{GSB7}}$ → (X) → (Y) → Z

(4) para producto vectorial: $\overline{V1}x\overline{V2}$

-introducir $\overline{V1}$: x1 $\boxed{\text{ENTER}}$ y1 $\boxed{\text{ENTER}}$ z1 $\boxed{\text{A}}$ → (x1) → (y1) → z1
-introducir $\overline{V2}$: x2 $\boxed{\text{ENTER}}$ y2 $\boxed{\text{ENTER}}$ z2 $\boxed{\text{GSB1}}$ → (X) → (Y) → Z

(5) para producto escalar : $\overline{V1}.\overline{V2}$

-introducir $\overline{V1}$: x1 $\boxed{\text{ENTER}}$ y1 $\boxed{\text{ENTER}}$ z1 $\boxed{\text{A}}$ → (x1) → (y1) → z1
-introducir $\overline{V2}$: x2 $\boxed{\text{ENTER}}$ y2 $\boxed{\text{ENTER}}$ z2 $\boxed{\text{GSB0}}$ → n

(6) para hallar el ángulo entre $\overline{V1}$ y $\overline{V2}$: $\varphi(\overline{V1},\overline{V2})$

-introducir $\overline{V1}$: x1 $\boxed{\text{ENTER}}$ y1 $\boxed{\text{ENTER}}$ z1 $\boxed{\text{A}}$ → (x1) → (y1) → z1
-introducir $\overline{V2}$; x2 $\boxed{\text{ENTER}}$ y2 $\boxed{\text{ENTER}}$ z2 $\boxed{\text{GSB9}}$ → φ

(7) para hallar el módulo de un vector: /V/

-introducir el vector: x $\boxed{\text{ENTER}}$ y $\boxed{\text{ENTER}}$ z $\boxed{\text{GSB 5}}$ → /V/

(8) para almacenar un vector en "M" : STO V

-introducir el vector: x $\boxed{\text{ENTER}}$ y $\boxed{\text{ENTER}}$ z $\boxed{\text{GSB 8}}$ → (x) → (y) → z

(9) para recuperar un vector almacenado en "M" : RCL V

-pulsar: $\boxed{\text{B}}$ → (x) → (y) → z

(10) para duplicar en "Y" el vector en "X" : ENTER V

-introducir el vector: x $\boxed{\text{ENTER}}$ y $\boxed{\text{ENTER}}$ z $\boxed{\text{A}}$ → (x) → (y) → z

Estas son instrucciones para realizar operaciones separadas. Si las operaciones van en cadena, no es preciso reintroducir constantemente datos, ya que los resultados (si son vectores) quedan automáticamente almacenados en "Y" , evitando su reintroducción. Igualmente , las operaciones de una sola variable (módulo, STO, RCL) , operan sobre el vector en "X" . Si éste ya está en "X" (porque es un resultado, o ha sido llevado allí mediante un RCL) , no es necesario reintroducirlo, por supuesto. Los ejemplos aclararán esto.

LBL A = ENTER V ; LBL B = RCL V ; LBL 8 = STO V ; LBL 5 = /V/

LBL 4 = V1 V2 ; LBL 7 = V1 - V2; LBL 1 = V1xV2 ; LBL 0 = V1 . V2

LBL 9 = áng(V1 , V2)

3.- Ejemplos .-

(1) Dados los vectores $\bar{A} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{B} = -2\bar{i} + \bar{j} + 8\bar{k}$, hallar: a) su suma ; b) su diferencia ; c) su producto vectorial ; d) su producto escalar ; e) módulo de cada uno ; f) ángulo que forman entre sí .

FIX 0	3	ENTER	2	ENTER	-4	A	→ (3)	→ (2)	→ -4
	-2	ENTER	1	ENTER	8	GSB4	→ (1)	→ (3)	→ 4

es decir, $\bar{A}+\bar{B} = \bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$

	3	ENTER	2	ENTER	-4	A	→ (3)	→ (2)	→ -4
	-2	ENTER	1	ENTER	8	GSB7	→ (5)	→ (1)	→ -12

tenemos , $\bar{A}-\bar{B} = 5\bar{i} + \bar{j} - 12\bar{k}$

	3	ENTER	2	ENTER	-4	A	→ (3)	→ (2)	→ -4
	-2	ENTER	1	ENTER	8	GSB1	→ (20)	→ (-16)	→ 7

resulta , $\bar{A}x\bar{B} = 20\bar{i} - 16\bar{j} + 7\bar{k}$

	3	ENTER	2	ENTER	-4	A	→ (3)	→ (2)	→ -4
	-2	ENTER	1	ENTER	8	GSB0	→ -36		

asi que $\bar{A}.\bar{B} = -36$

FIX 4	3	ENTER	2	ENTER	-4	GSB5	→ 5.3852	(módulo de $\bar{A}$)
	-2	ENTER	1	ENTER	8	GSB5	→ 8.3066	(id. de $\bar{B}$)

	3	ENTER	2	ENTER	-4	A	→ (3)	→ (2)	→ -4
	-2	ENTER	1	ENTER	8	GSB9	→ 143.5893		

el ángulo entre $\bar{A}$ y $\bar{B}$ es de 143.5893 grados

(2) Hallar el valor de :
$K = (((2\bar{i}+3\bar{j}-5\bar{k})+(-3\bar{i}+\bar{j}+4\bar{k}))x((3\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k})x(2\bar{i}+3\bar{j})-(3\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}))).(\bar{i}+3\bar{j}+$

FIX 0	-introducir datos:	3	ENTER	1	ENTER	-2	A	→ (3)	→ (1)	→ -2
		2	ENTER	3	ENTER	0	GSB1	→ (6)	→ (-4)	→ 7
		3	ENTER	2	ENTER	1	GSB7	→ (3)	→ (-6)	→ 6
	-almacenar resultado parcial:						GSB8	→ (3)	→ (-6)	→ 6
	-introducir datos:	2	ENTER	3	ENTER	-5	A	→ (2)	→ (3)	→ -5
		-3	ENTER	1	ENTER	4	GSB4	→ (-1)	→ (4)	→ -1
	-recuperar resultado parcial:						B	→ (3)	→ (-6)	→ 6
	-producto vectorial:						GSB1	→ (18)	→ (3)	→ -6
	-introducir datos:	1	ENTER	3	ENTER	6	GSB0	→ -9		

es decir, $\underline{\underline{K = -9}}$

(3) Demostrar que el producto vectorial de $\bar{A}x\bar{B}$ es ortogonal tanto a $\bar{A}$ como a $\bar{B}$, en el caso $A= 1\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $B = 4\bar{i} + 5\bar{j} + 6\bar{k}$

FIX 0	-introducir $\bar{A}$:	1	ENTER	2	ENTER	3	A	→ (1)	→ (2)	→ 3
	-introducir $\bar{B}$:	4	ENTER	5	ENTER	6	GSB8	→ (4)	→ (5)	→ 6
	-p.vectorial :						GSB1	→ (-3)	→ (6)	→ -3
	-recuperar $\bar{B}$:						B	→ (4)	→ (5)	→ 6
	--p.escalar :						GSB0	→ 0		
	-reintroducir $\bar{A}$:	1	ENTER	2	ENTER	3	GSB0	→ 0		

como los dos p. escalares son cero, el p.vectorial es ortogonal a ambos vectores.

HP 34 C

STEP/LINE		KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	*	LBL 1	25.13. 1	
		STO I	23.14.23	realiza el pro-
		RCL 1	24. 1	ducto vectorial
		x	61	
5		x⇌y	21	$V_1 \times V_2$
		STO 3	23. 3	
		RCL 2	24. 2	donde :
		x	61	
		-	41	$V_1=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$
10		x⇌y	21	
		STO 4	23. 4	$V_2=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}$
		RCL 2	24. 2	
		x	61	
		RCL 0	24. 0	las componentes
15		RCL I	24.14.23	del mismo son:
		x	61	
		-	41	$X= y_1z_2-y_2z_1$
		RCL 3	24. 3	
		STOx 0	23.61. 0	$Y= x_2z_1-x_1z_2$
20		R↓	15.22	
		RCL 4	24. 4	$Z= x_1y_2-x_2y_1$
		RCL 1	24. 1	
		x	61	
		STO- 0	23.41. 0	el nuevo vector
25		R↓	15.22	
		RCL 0	24. 0	(X,Y,Z)
	*	LBL A	25.13.11	
		STO 2	23. 2	reemplaza al
		R↓	15.22	
30		STO 1	23. 1	V_1
		R↓	15.22	
		STO 0	23. 0	LBL A .- alma-
	*	LBL 6	25.13. 6	cena el vector
		PAUSE	25.74	V_1, para su
35		R↑	14.22	uso en sucesi-
		PAUSE	25.74	vos cálculos.
		R↑	14.22	Es una especie
		RTN	25.12	de ENTER.
	*	LBL 7	25.13. 7	
40		CHS	32	realiza V_1-V_2
		R↓	15.22	
		CHS	32	el resultado
		R↓	15.22	sustituye al
		CHS	32	antiguo V_1
45		R↑	14.22	
		R↑	14.22	
	*	LBL 4	25.13. 4	realiza V_1+V_2
		STO+ 2	23.51. 2	
		R↓	15.22	
50		STO+ 1	23.51. 1	
		R↓	15.22	
		STO+ 0	23.51. 0	
		RCL 0	24. 0	
		RCL 1	24. 1	
55		RCL 2	24. 2	

STEP/LINE		KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
		GTO A	22.11	
	*	LBL B	25.13.12	
		RCL 5	24. 5	recupera el
		RCL 6	24. 6	vector V alma
60		RCL 7	24. 7	cenado en la
	*	LBL 8	25.13. 8	"memoria vect
		STO 7	23. 7	rial." M
		R↓	15.22	
		STO 6	23. 6	almacena el v
65		R↓	15.22	tor en "X" en
		STO 5	23. 5	memoria vecto
		GTO 6	22. 6	rial M
	*	LBL 9	25.13. 9	
		STO I	23.14.23	calcula el án
70		R↓	15.22	gulo entre V_1
		STO 3	23. 3	V_2.
		R↓	15.22	
		STO 4	23. 4	Utiliza la fó
		R↑	14.22	mula:
75		R↑	14.22	
		GSB 5	13. 5	
		RCL 0	24. 0	$\cos\varphi = \frac{\bar{V1}.\bar{V2}}{/V1//V}$
		RCL 1	24. 1	
		RCL 2	24. 2	
80		GSB 5	13. 5	
		x	61	el resultado
		RCL 4	24. 4	queda en pant
		RCL 3	24. 3	lla.
		RCL I	24.14.23	
		R↑	14.22	
		STO I	23.14.23	
		R↓	15.22	
		GSB 0	13. 0	
		RCL I	24.14.23	
90		/	71	
		COS^{-1}	15. 8	
		RTN	25.12	
	*	LBL 5	25.13. 5	calcula el mó
		x^2	15. 3	lo del vector
95		x⇌y	21	en X .
		x^2	15. 3	
		+	51	el resultado
		x⇌y	21	queda en pan-
		x^2	15. 3	talla.
100		+	51	
		√	14. 3	
		RTN	25.12	
	*	LBL 0	25.13. 0	calcula el pro
		RCL 2	24. 2	

-no se utiliza ningun flag
-se utilizan las etiquetas A,B,0,1,4,5,6,7,8,9
- id. registros I,0,1,2,3,4,5,6,7
- id. en total 114 pasos de programa
-se recomiendan modas FIX 4 y DEG

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x 1	y1	z1	y2	x2	X	Y	Z		
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
105	x	61	ducto escalar
	x⇌y	21	V1.V2
	RCL 1	24. 1	
	x	61	el resultado
	+	51	queda en
110	x⇌y	21	pantalla.
	RCL 0	24. 0	
	x	61	
	+	51	
	RTN	25.12	
115			
120			
125			
130			
135			
140			
145			
150			
155			

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
160			
165			
170			
175			
180			
185			
190			
195			
200			
205			
210			

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x1	y1	z1	y2	x2	X	Y	Z		
.0	.1	.2	.3	.4					

DETERMINANTE , ECUACION CARACTERISTICA AUTOVALORES , DE UNA MATRIZ 3 x 3

1.- Descripción .- Dada una matriz 3x3 , de la forma genérica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

el presente programa permite hallar su determinante, su ecuación característica, y sus 3 autovalores (que pueden ser los 3 reales ó 1 real y 2 imaginarios conjugados).

Se utilizan las siguientes fórmulas:

determinante de A = $\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+$
$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$

ecuación característica de A : es la ecuación $/A - \lambda I/ = 0$,es decir

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

; el programa halla los coeficientes A_3, A_2, A_1, A_0 de la expansión de este determinante, que es una ecuación cúbica de la forma:

$$A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 \qquad (x = \lambda)$$

autovalores: son las raices de la ecuación característica, λ_1 , λ_2 , λ_3

el programa emplea la función $\boxed{\text{SOLVE}}$ para hallar el autovalor real (siempre hay uno, por lo menos) , buscando su valor en el intervalo (10^6 , -10^6) lo cual garantiza practicamente el éxito de la búsqueda. Una vez hallado este autovalor , λ_1, la ecuación se reduce a otra de segundo grado, que se resuelve con la fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

lo cual da los restantes autovalores, reales o imaginarios.

2.- Utilización .- Introducir el programa

(1) introducir los a_{ij} : a_{11} $\boxed{\text{ENTER}}$ a_{12} $\boxed{\text{ENTER}}$ a_{13} $\boxed{\text{A}}$ → ignórese
a_{21} $\boxed{\text{ENTER}}$ a_{22} $\boxed{\text{ENTER}}$ a_{23} $\boxed{\text{R/S}}$ → ignórese
a_{31} $\boxed{\text{ENTER}}$ a_{32} $\boxed{\text{ENTER}}$ a_{33} $\boxed{\text{R/S}}$ → determinante

$\boxed{\text{R/S}}$ → A_3 $\boxed{\text{R/S}}$ → A_2 $\boxed{\text{R/S}}$ → A_1 $\boxed{\text{R/S}}$ → A_0

$\boxed{\text{R/S}}$ → λ_1 $\boxed{\text{R/S}}$ → λ_2 $\boxed{\text{R/S}}$ → λ_3

ó $\boxed{\text{R/S}}$ → (1) → parte real $\boxed{\text{R/S}}$ → parte imaginaria

(2) para otro caso , ir a (1)

3.- Notas .- -los autovalores imaginarios son $\lambda_{2,3}$ = p.real $\pm$ i p.imag.

-si solo se desean el determinante, o los A_i, ignórese el resto del proceso, una vez obtenidos .

4.- Ejemplos .-

(1) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

hallar: a) su determinante ; b) su ecuación característica
c) sus autovalores

$\boxed{\text{FIX } 9}$

--introducimos la matriz: 3 $\boxed{\text{ENTER}}$ -2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\text{A}}$ → 3.000000000
4 $\boxed{\text{ENTER}}$ -6 $\boxed{\text{ENTER}}$ 3 $\boxed{\text{R/S}}$ → -8.000000000
1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 7 $\boxed{\text{R/S}}$ → -80.00000000 (d

asi que tenemos : $\det(A) = -80$

--ahora, la ec. característica: $\boxed{\text{R/S}}$ → 1.000000000 (A_3)
$\boxed{\text{R/S}}$ → -4.000000000 (A_2)
$\boxed{\text{R/S}}$ → -38.00000000 (A_1)
$\boxed{\text{R/S}}$ → 80.00000000 (A_0)

por consiguiente, la ecuación característica es

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 38\lambda + 80 = 0$$

--finalmente, los autovalores : $\boxed{\text{R/S}}$ → 7.611566639 (λ_1)
$\boxed{\text{R/S}}$ → -5.516736465 (λ_2)
$\boxed{\text{R/S}}$ → 1.905169828 (λ_3)

y hemos obtenido los autovalores:

$$\lambda_1 = 7.611566639$$
$$\lambda_2 = -5.516736465$$
$$\lambda_3 = 1.905169828$$

(2) Como ejemplo de lo plomazo que pueden llegar a ser estos problemas (que por otra parte, los profesores de Algebra de 1º parecen sentirse muy inclinados a ponerlos por doquier) ,resolver el siguiente: (a mano, claro)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3.4328 & -2.1862 & 9.1327 \\ -2.0063 & 4.3665 & 6.1206 \\ 1.9843 & 2.1427 & -3.1416 \end{pmatrix}$ $\boxed{\text{FIX } 4}$

Hallar su determinante, su ec. característica, y sus autovalore

-introducir a_{ij} : 3.4328 $\boxed{\text{ENTER}}$ -2.1862 $\boxed{\text{ENTER}}$ 9.1327 $\boxed{\text{A}}$
-2.0063 $\boxed{\text{ENTER}}$ 4.3665 $\boxed{\text{ENTER}}$ 6.1206 $\boxed{\text{R/S}}$
1.9843 $\boxed{\text{ENTER}}$ 2.1427 $\boxed{\text{ENTER}}$ -3,1416 $\boxed{\text{R/S}}$ →

→ -223.2727 es el valor del determinante

$\boxed{\text{R/S}}$ → 1.0000 (A_3) $\boxed{\text{R/S}}$ → -4.6577 (A_2) $\boxed{\text{R/S}}$ → -45.1358 (A_1)

$\boxed{\text{R/S}}$ → 223.2727 (A_0) ,así que la ec. característica es:

$$\lambda^3 - 4.6577\lambda^2 - 45.1358\lambda + 223.2727 = 0$$

los autovalores, $\boxed{\text{R/S}}$ → -6.8025 (λ_1)
$\boxed{\text{R/S}}$ → 5.6212 (λ_2)
$\boxed{\text{R/S}}$ → 5.8390 (λ_3)

han resultado ser $\lambda_1 = -6.8025$
$\lambda_2 = 5.6212$
$\lambda_3 = 5.8390$

HP 34 C

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL A	25.13.11	almacena a_{11}, a_{12}, a_{13}
	STO 3	23. 3	
	STO 4	23. 4	
	STO 7	23. 7	
5	R↓	15.22	
	STO 2	23. 2	
	STO 6	23. 6	
	R↓	15.22	
	STO 1	23. 1	
10	STO 5	23. 5	
	R/S	74	
	STOx 6	23.61. 6	almacena a_{21}, a_{22}, a_{23} y va trabajando con ellos y los anteriores
	R↓	15.22	
	STOx5	23.61. 5	
15	STOx3	23.61. 3	
	STO+1	23.51. 1	
	R↓	15.22	
	STOx 4	23.61. 4	
	STOx 2	23.61. 2	
20	R↓	15.22	
	x⇄y	21	
	x	61	
	STO- 4	23.41. 4	
	RCL 3	24. 3	
25	STO- 6	23.41. 6	
	RCL 2	24. 2	
	STO- 5	23.41. 5	
	R/S	74	almacena a_{31}, a_{32}, a_{33} y sigue trabajando con estos y todos los anteriores
	STO 3	23. 3	
30	R↓	15.22	
	STOx 4	23.61. 4	
	LAST X	25. 0	
	x	61	
	x⇄y	21	
35	STOx 6	23.61. 6	
	RCL 7	24. 7	calcula el determinante y lo deja en R_4
	x	61	
	+	51	
	RCL 5	24. 5	
40	-	41	los coeficientes de la ecuación caracteristica quedan en R_1, R_7, y R_4, todos ellos cambiados de signo
	STO 7	23. 7	
	LAST X	25. 0	
	RCL 1	24. 1	
	RCL 3	24. 3	
45	STO+1	23.51. 1	
	x	61	
	STO- 7	23.41. 7	
	x⇄y	21	
	LAST X	25. 0	
50	x	61	
	STO+4	23.51. 4	
	RCL 6	24. 6	
	STO+4	23.51. 4	
	RCL 4	24. 4	
55	R/S	74	

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	1	1	muestra A_3
	R/S	74	
	RCL 1	24. 1	muestra A_2
	CHS	32	
60	R/S	74	
	RCL 7	24. 7	muestra A_1
	CHS	32	
	R/S	74	
	RCL 4	24. 4	muestra A_0
65	CHS	32	
	R/S	74	
	EEX	33	calcula el 1er autovalor, que es una rai de $A_3x^3+A_2x^2+A_1x+$ la busca en el intervalo $(-10^6, 10^6)$
	6	6	
	ENTER	31	
70	CHS	32	
	SOLVE 0	14.73. 0	
	R/S	74	
	STO 0	23. 0	
	RCL 1	24. 1	
75	-	41	
	STO 2	23. 2	
	x^2	15. 3	
	RCL 2	24. 2	
	RCL 0	24. 0	
80	x	61	una vez encontrada, reduce la ecuación a una de 2º grad que a su vez e resuelta empleando la fórmula típica de la ecuación de segundo grado, lo cual proporciona los otros dos autovalores reales o complejos.
	RCL 7	24. 7	
	-	41	
	4	4	
	x	61	
	-	41	
	x<0	15.41	
	GTO 1	22. 1	
	√x	14. 3	
	STO 3	23. 3	
90	RCL 2	24. 2	
	+	51	
	2	2	
	/	71	
	CHS	32	
95	R/S	74	
	RCL 3	24. 3	
	RCL 2	24. 2	
	-	41	
	2	2	
100	/	71	
	RTN	25.12	
*	LBL 1	25.13. 1	
	1	1	
	PAUSE	25.74	

- no se utiliza ningun flag
- se utilizan las etiquetas A, 0, 1
- id. registros 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- id. en total 126 pasos de programa
- se recomienda moda FIX 4
- id. cualquier moda angular

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
usado	usado	usado	usado	usado	usado	usado	usado	usado	usado
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
105	R↓	15.22	muestra los valores de las partes real y compleja de los dos autovalores restantes
	ABS	25.34	
	√x	14. 3	
	2	2	
	/	71	
110	RCL 2	24. 2	
	2	2	
	/	71	
	CHS	32	
	R/S	74	
115	x⇌y	21	
	RTN	25.12	
	* LBL 0	25.13. 0	subrutina auxiliar empleada por la función SOLVE para hallar el primer autovalor
	RCL 1	24. 1	
	-	41	
120	x	61	
	RCL 7	24. 7	
	-	41	
	x	61	
	RCL 4	24. 4	
125	-	41	
	RTN	25.12	
130			
135			
140			
145			
150			
155			
160			
165			
170			
175			
180			
185			
190			
195			
200			
205			
210			

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
usado	usado	usado	usado	usado	usado	usado	usado	usado	usado
.0	.1	.2	.3	.4					

INTERPOLACION

1.- Descripción .- Dada una serie de puntos (x_i, y_i) cuyas abcisas estén igualmente espaciadas, es decir, sean de la forma $x_i = x_0 + k.h$, este programa calcula un polinomio que pasa por todos los puntos (x_i, y_i), para , a partir de él, poder interpolar y hallar nuevos valores de y para valores de x distintos de los datos.

Utiliza el método de las diferencias finitas y la fórmula de Newton.

-primero, realiza un cambio de origen y escala : $x' = (x - x_0)/h$ de forma que $x'_k = k$

-despues, calcula una tabla de diferencias finitas:

0	1	2	3	4	...
yo	y1	y2	y3	y4	...

$$\Delta y_0 \quad \Delta y_1 \quad \Delta y_2 \quad \Delta y_3 \quad \dots$$
$$\Delta^2 y_0 \quad \Delta^2 y_1 \quad \Delta^2 y_2 \quad \dots$$
$$\Delta^3 y_0 \quad \Delta^3 y_1 \quad \dots$$

en general $\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k$

- Una vez calculadas las diferencias, es posible interpolar, según la fórmula de Newton

$$\hat{y} = y_0 + x'\Delta y_0 + \frac{x'(x'-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots$$

donde x' se obtiene a partir de x con el cambio ya mencionado.

- el grado del polinomio es N-1 si el nº de datos es N. En el caso de 2 datos se obtiene una recta: interpolación lineal. N debe ser : $N \leq 16$

2.- Utilización .- Introducir el programa

(1) Introducir: x_0 (abcisa del 1er punto-dato)
h (espaciado entre las abcisas de los puntos)
N (nº de puntos)

x_0 [ENTER] h [ENTER] N [A] → x_0

(2) Introducir los valores y_k $(0 \leq k \leq N)$: y_k [R/S] → x_{k+1}

... .

y_N [R/S] → 0.00

(3) Evaluar $\hat{y}$ para un x dado: x [B] → $\hat{y}$

(4) repetir el paso (3) cuantas veces se desee

(5) para otro caso, ir a (1)

3.- Notas .- -un error cometido al entrar y_k puede ser corregido en todos los casos excepto si k = N (último dato). Simplemente almacenese el valor correcto y_k en el registro R_k durante una cualquiera de las paradas de introducción de datos.

-la subrutina LBL B puede ser utilizada conjuntamente con las funciones [SOLVE] e [INTEGRATE] para hallar los ceros de la función interpolada, o su integral.

-el número de datos no debe exceder 16

4.- Ejemplos .-

(1) Se tiene la siguiente serie de puntos : (N = 9 datos)

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
y	1	2	4	6	7	5	3	0	-3

Se pide estimar el valor de y(2.2) e y(3.8) (Interpolación)
el valor de y(0) e y(6) (Extrapolación)

-introducimos x_0, h, N : 1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 0.5 $\boxed{\text{ENTER}}$ 9 $\boxed{\text{A}}$ → 1.0000 (x_0)

-introducimos los y_k : 1 $\boxed{\text{R/S}}$ 2 $\boxed{\text{R/S}}$ 4 $\boxed{\text{R/S}}$ 6 $\boxed{\text{R/S}}$ 7 $\boxed{\text{R/S}}$ 5 $\boxed{\text{R/S}}$ 3 $\boxed{\text{R/S}}$
0 $\boxed{\text{R/S}}$ -3 $\boxed{\text{R/S}}$ → 0.0000

-calculamos las interpolaciones: 2.2 $\boxed{\text{B}}$ → 4.6883 = $\hat{y}(2.2)$
3.8 $\boxed{\text{B}}$ → 3.6309 = $\hat{y}(3.8)$

los valores interpolados son razonables

-calculamos las extrapolaciones: 0 $\boxed{\text{B}}$ → 705.0000 = $\hat{y}(0)$
6 $\boxed{\text{B}}$ → 854.0000 = $\hat{y}(6)$

en cambio, las extrapolaciones son disparatadas
¡ es muy peligroso extrapolar polinomios de interpolación !

(2) Hallar el punto de corte con el eje de abcisas de la recta que pasa por (1,4) y (3,3)

-introducir x_0, h, N : 1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 2 $\boxed{\text{ENTER}}$ 2 $\boxed{\text{A}}$ → 1.0000 (x_0)

-introducir y_0, y_1: 4 $\boxed{\text{R/S}}$ 3 $\boxed{\text{R/S}}$ → 0.0000

-hallar el p. de corte : $\boxed{\text{SOLVE}}$ $\boxed{\text{B}}$ → 9.0000 (x_c) $\boxed{\text{B}}$ → 0.0000 (y_c)

el punto de corte es $(x_c, y_c) \equiv$ (9,0)

(3) Se pretende planimetrar una curva (esto es , hallar el area entre la curva y el eje de abcisas) de la cual sólo se conocen los siguientes puntos:

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	0.0000	0.1998	0.3987	0.5955	0.7894	0.9794

6 datos con espaciado 0.1

-introducir x_0, h, N : 0 $\boxed{\text{ENTER}}$ 0.1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 6 $\boxed{\text{A}}$ → 0.0000 (x_0)

-introducir los y_k : 0 $\boxed{\text{R/S}}$ 0.1998 $\boxed{\text{R/S}}$ 0.3897 $\boxed{\text{R/S}}$ → 0.3000 (x_3)

hemos cometido un error: y_2 es 0.3987 , no 0.3897 . Lo corregimos:

0.3987 $\boxed{\text{STO 2}}$, y seguimos : 0.5955 $\boxed{\text{R/S}}$ 0.7894 $\boxed{\text{R/S}}$ 0.9794 $\boxed{\text{R/S}}$ → 0.00

-calculamos el area $A = \int_0^{0.5} f(x)\,dx$:

0 $\boxed{\text{ENTER}}$ 0.5 $\boxed{\int_y^x}$ $\boxed{\text{B}}$ → 0.2474 ; el area vale A = 0.2474

(en realidad, los datos son de f(x) = x + sin x , y el area vale

$$A = \int_0^{0.5} (x + \sin x)\,dx = 0.2474$$)

HP 34C

	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL A	25.13.11	cálculo de los Δ
	1	1	
	-	41	N-1 en R.6 (=n)
	STO .6	23..6	h en R.7
	EEX	33	
	3	3	
	÷	71	prepara el regis-
	STO I	23.14.23	tro I especifi-
	R↓	15.22	cando el límite
	STO .7	23..7	superior para
	R↓	15.22	futuras iteracio
	STO .8	23..8	nes.
*	LBL 1	25.13. 1	
	RCL I	24.14.23	Entrada de los
	INT	25.32	datos
	RCL .7	24..7	
	x	61	$x'_k = k$
	RCL .8	24..8	
	+	51	x_0 $h.x'_k = x_k$
	R/S	74	
	STO (i)	23.14.24	almacena y_i
	ISG	15.24	
	GTO 1	22. 1	vuelve a LBL 1
*	LBL 2	25.13. 2	
	RCL .6	24..6	cálculo de las
	x=0	15.71	diferencias
	RTN	25.12	
	1	1	contador de j
	-	41	hace desde n-1
	STO .6	23..6	hasta 0
	RCL I	24.14.23	
	FRAC	25.33	prepara I para
	+	51	iterar desde
	STO I	23.14.23	k = 1 hasta
	CL X	34	k = n-j
*	LBL 3	25.13. 3	
	STO- (i)	23.41.24	calculo de $\Delta^k y_j$
	RCL (i)	24.14.24	
	ISG	15.24	k = k +1
	GTO 3	22. 3	k < n-j
	GTO 2	22. 2	nuevo j
*	LBL B	25.13.12	evaluación $\hat{y}$
	RCL .8	24..8	
	-	41	$x-x_0$
	RCL .7	24..7	
	÷	71	$x' = (x-x_0)/h$
	STO .6	23..6	
	RCL I	24.14.23	prepara I
	FRAC	25.33	
	STO I	23.14.23	
	ISG	15.24	
	1	1	
	RCL 0	24. 0	
*	LBL 4	25.13. 4	
	x⇄y	21	

KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
RCL .6	24..6	tiene en panta
RCL I	24.14.23	lla, de la ant
INT	25.32	rior iteración
-	41	
1	1	$\frac{x(x-1)\ldots(x-k+2}{(k-1)!}$
+	51	
x	61	
RCL I	24.14.23	multiplica aho
INT	25.32	por (x-k 1)y d
÷	71	vide por k par
ENTER	31	obtener
ENTER	31	
R↓	15.22	$\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1}{k!}$
R↓	15.22	
RCL (i)	24.14.24	
x	61	guarda este va
+	51	lor en el Stac
ISG	15.24	para la próxim
GTO 4	22. 4	iteración, lo
RTN	25.12	multiplica por
		$\Delta^{k}y_0$ y lo añade
		a la sumatoria

-no se utiliza ningun flag
-se utilizan las etiquetas A, B, 1, 2, 3, 4
- id. registros I, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .0, .1, .2, .3, .4, .5, .6, .7, .8
- id. en total 75 pasos de programa
-se recomiendan modos FIX 4 y cualquiera angular

REGISTERS

0 yo	1 y1; Δy_0	2 y2; Δ^2	3 y3; Δ^3	4 y4; Δ^4	5 y5; Δ^5	6 y6; Δ^6	7 y7; Δ^7	8 y8; Δ^8	9 y9; Δ^9
.0 y10; Δ^{10}	.1 y11; Δ^{11}	.2 y12; Δ^{12}	.3 y13; Δ^{13}	.4 y14; Δ^{14}	.5 y15; Δ^{15}	.6 N; X'	.7 h	.8 xo	.9

AJUSTE DE DATOS

1.- Descripción .- Este programa permite ajustar una curva de 2º ó 3^er grado a una serie de datos (x_i, y_i).

Se tienen una serie de pares de datos (x_i, y_i): el programa calcula los coeficientes A_0, A_1, A_2, A_3 de un polinomio:

$$P(x) = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

de forma que $P(x_i) = y_i$, es decir, que la curva representativa del polinomio $P(x)$ pase a traves de los puntos dados. Puede elegirse entre grado 2 ó grado 3, dependiendo del nº de pares de datos (x_i, y_i) de que se disponga. Si son 3 pares de datos, el grado debe ser 2, y el polinómio será:

$$P(x) = A_2x^2 + A_1x + A_0$$

es decir, una parábola que pasa por los 3 puntos. Si son 4 pares de datos el polinomio será:

$$P(x) = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$

o sea, una parábola cúbica que incluye a los 4 puntos. Los datos no tienen que estar necesariamente equiespaciados, pueden ser puntos cualesquiera, con la condición de que no haya 2 con identica abcisa x.

Los puntos-dato permanecen almacenados en registros adecuados, y no se ven afectados por el programa, permitiendo así recalcular los coeficientes despues de cambiar algun dato, sin tener que reintroducirlos todos de nuevo. Los coeficientes pueden ser mostrados en cualquier momento. Despues de hallarlos, es posible efectuar interpolaciones, o calcular un valor y para un x dado, basandose en el polinomio. Incluso pueden hallarse los ceros reales del polinomio, o su integral utilizando las funciones incorporadas $\boxed{\int_y^x}$ y $\boxed{\text{SOLVE}}$. (esto puede resultar muy util, si es preciso calcular la integral de una función de la cual sólo se conocen valores en determinados puntos. Se escogen 4 pares de datos representativos, se halla el $P(x)$ de 3^er grado que los incluye, y se integra este $P(x)$ utilizando $\boxed{\int_y^x \text{ B}}$. El resultado será una buena aproximación de la f(x))

2.- Utilización .- introducir el programa

(1) para 3^er grado : -pulsar $\boxed{\text{CF 0}}$
-introducir datos: $\boxed{\text{A}} \rightarrow 3.0000$ (grado 3)

x_0 $\boxed{\text{R/S}}$, y_0 $\boxed{\text{R/S}}$, x_1 $\boxed{\text{R/S}}$, y_1 $\boxed{\text{R/S}}$ ... , y_3 $\boxed{\text{R/S}} \rightarrow A_3$
$\boxed{\text{R/S}} \rightarrow A_2$
$\boxed{\text{R/S}} \rightarrow A_1$
$\boxed{\text{R/S}} \rightarrow A_0$

(2) para calcular P(x), para x dado: x $\boxed{\text{B}} \rightarrow P(x)$

(3) para revisar de nuevo los coefic. : $\boxed{\text{GSB 7}} \rightarrow A_3$ $\boxed{\text{R/S}} \rightarrow A_2$, etc.

(4) para cambiar algun dato, y recalcular coeficientes:

-almacenar el dato en el reg.adecuado, y $\boxed{\text{GSB 9}} \rightarrow A_3$ $\boxed{\text{R/S}} \rightarrow A_2$, etc

(5) para grado 2 : -pulsar $\boxed{\text{SF 0}}$
-introducir datos : $\boxed{\text{A}} \rightarrow 2.0000$ (grado 2)

x_0 $\boxed{\text{R/S}}$, y_0 $\boxed{\text{R/S}}$, x_1 $\boxed{\text{R/S}}$, y_1 $\boxed{\text{R/S}}$, ... , y_2 $\boxed{\text{R/S}} \rightarrow A_2$
$\boxed{\text{R/S}} \rightarrow A_1$
$\boxed{\text{R/S}} \rightarrow A_0$

(6) para revisar de nuevo coef, calcular P(x) para un x dado, o cambiar algun dato, ir a (2), (3),

(7) para otro caso, ir a (1) ó (5)

3.- Ejemplos .-

(1) Se tiene el siguiente conjunto de datos procedentes de un experimento. Basandose en ellos, se pide hallar una aproximación para la expresión de $y = f(x)$ en el intervalo $(0,1)$ mediante un polinomio cúbico. ¿Cual será el valor de $f(1)$, $f(0.5)$? ¿Cual será el valor de la integral de $f(x)$ entre $(0,1)$?

x	0.0200	0.3274	0.6923	0.9978
y	1.0202	1.3874	1.9983	2.7123

-son 8 datos, asi que será grado 3. Pulsar $\boxed{\text{CF 0}}$

-introducir datos:

$\boxed{A} \rightarrow 3.0000$; 0.02 $\boxed{R/S}$ 1.0202 $\boxed{R/S}$ 0.3274 $\boxed{R/S}$ 1.3874 $\boxed{R/S}$

0.6923 $\boxed{R/S}$ 1.9983 $\boxed{R/S}$ 0.9978 $\boxed{R/S}$ 2.7123 $\boxed{R/S}$ → 0.2818 (A_3)
$\boxed{R/S}$ → 0.4204 (A_2)
$\boxed{R/S}$ → 1.0163 (A_1)
$\boxed{R/S}$ → 0.9997 (A_0)

es decir, $f(x) \simeq P(x) = 0.2818x^3 + 0.4204x^2 + 1.0163x + 0.9997$

$f(1) \simeq P(1)$: 1 $\boxed{B} \rightarrow 2.7182$ (comparar con $f(x) = e^x$; $f(1) = 2.718$
$f(0.5) \simeq P(0.5)$: 0.5 $\boxed{B} \rightarrow 1.6482$ ($f(0.5) = 1.6487$)

-para aproximar la integral entre 0 y 1 de $f(x)$: $\int_0^1 f(x)\,dx$

0 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1 $\boxed{\int_y^x B}$ → 1.7185 (comparar con $\int_0^1 e^x\,dx = 1.7182$)

(2) Diversas medidas de un proceso han dado la siguiente tabla de resultados. Deducir una expresión aproximada de $f(x)$ basandose en los mismos. ¿Cual es el valor de $f(3.05)$? ¿Para que valor de x es $f(x) = 0$?

x	3.0	3.1	3.2
y	0.1411	0.0416	-0.0584

-son 6 datos, 2º grado : $\boxed{\text{SF 0}}$

-introducir datos: $\boxed{A} \rightarrow 2.0000$; 3 $\boxed{R/S}$ 0.1411 $\boxed{R/S}$ 3.1 $\boxed{R/S}$

0.0416 $\boxed{R/S}$ 3.2 $\boxed{R/S}$ -0.0584 $\boxed{R/S}$ → -0.0250 (A_2)
$\boxed{R/S}$ → -0.8425 (A_1)
$\boxed{R/S}$ → 2.8936 (A_0)

-es decir, tenemos por ahora $f(x) \simeq P(x) = -0.0250x^2 - 0.8425x + 2.8936$

-supongamos que se añade un nuevo dato, $x = 3.3$, $y = -0.1577$ esto nos permite mejorar el ajuste, haciendolo de 3er grado: $\boxed{\text{CFO}}$

3.3 $\boxed{\text{STO 6}}$ -0.1577 $\boxed{\text{STO 7}}$ $\boxed{\text{GSB 9}}$ → +0.2000 (A_3)
$\boxed{R/S}$ → -1.8850 (A_2)
$\boxed{R/S}$ → 4.9215 (A_1)
$\boxed{R/S}$ → -3.0584

asi que es $f(x) \simeq P(x) = 0.2000x^3 - 1.8850x^2 + 4.9215x - 3.0584$

$f(3.05) \simeq P(3.05)$: 3.05 $\boxed{B}$ → 0.0915

y el valor x para el cual es $f(x) = 0$, obviamente está entre 3.1 y 3.2 , asi que :

3.1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 3.2 $\boxed{\text{SOLVE B}}$ → 3.1416 $\boxed{\text{FIX 6}}$ → 3.141592

la función exacta es $y = \sin(x)$, luego el cero es $\pi = 3.141592654$

HP 34 C

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE
	*LBL A	25.13.11
	7	7
	F? 0	25.71. 0
	5	5
5	ENTER	31
	EEX	33
	3	3
	/	71
	STO I	23.14.23
10	3	3
	F? 0	25.71. 0
	2	2
	*LBL 1	25.13. 1
	R/S	74
15	STO (i)	23.14.24
	ISG	15.24
	GTO 1	22. 1
	*LBL 9	25.13. 9
	RCL 3	24. 3
20	RCL 1	24. 1
	RCL 2	24. 2
	RCL 0	24. 0
	GSB 0	13. 0
	STO 8	23. 8
25	RCL 5	24. 5
	RCL 3	24. 3
	RCL 4	24. 4
	RCL 2	24. 2
	GSB 0	13. 0
30	STO 9	23. 9
	F? 0	25.71. 0
	GTO 2	22. 2
	RCL 7	24. 7
	RCL 5	24. 5
35	RCL 6	24. 6
	RCL 4	24. 4
	GSB 0	13. 0
	RCL 9	24. 9
	RCL 6	24. 6
40	RCL 2	24. 2
	GSB 0	13. 0
	STO I	23.14.23
	*LBL 2	25.13. 2
	RCL 9	24. 9
45	RCL 8	24. 8
	RCL 4	24. 4
	RCL 0	24. 0
	GSB 0	13. 0
	STO 9	23. 9
50	F? 0	25.71. 0
	GTO 3	22. 3
	RCL I	24.14.23
	RCL 0	24. 0
	RCL 6	24. 6
55	GSB 0	13. 0

preparación para la introducción de datos. En caso de 3er grado, hacen falta 8 datos (x,y), que serán almacenados en R0 a R7. Si es de grado 2, solo hacen falta 6 datos, que se almacenan en R0 a R5

cálculo de las diferencias divididas: se calculan :

$y(x_0,x_1)$,

$y(x_1,x_2)$,

$y(x_2,x_3)$,

$y(x_0,x_1,x_2)$,

$y(x_1,x_2,x_3)$,

$y(x_0,x_1,x_2,x_3)$

y despues, el polinomio se reconvierte a la forma standard, cuyos coeficientes son:

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE
	STO I	23.14.23
	*LBL 4	25.13. 4
	RCL 1	24. 1
	RCL 9	24. 9
60	RCL 4	24. 4
	RCL I	24.14.23
	x	61
	-	41
	RCL 2	24. 2
65	x	61
	RCL 8	24. 8
	-	41
	RCL 0	24. 0
	x	61
70	+	51
	STO .0	23. .0
	RCL 0	24. 0
	RCL 2	24. 2
	+	51
75	RCL 4	24. 4
	x	61
	RCL 0	24. 0
	RCL 2	24. 2
	x	61
80	+	51
	RCL I	24.14.23
	x	61
	STO+ 8	23.51. 8
	RCL 9	24. 9
	RCL 0	24. 0
	RCL 2	24. 2
	+	51
	x	61
	STO- 8	23.41. 8
90	LAST X	25. 0
	RCL 4	24. 4
	+	51
	RCL I	24.14.23
	x	61
95	STO- 9	23.41. 9
	*LBL 7	25.13. 7
	F? 0	25.71. 0
	GTO 5	22. 5
	RCL I	24.14.23
100	R/S	74
	*LBL 5	25.13. 5
	RCL 9	24. 9
	R/S	74
	RCL 8	24. 8

$A_3 = y(x_0,x_1,x_2,x_3)$, ó cero

$A_2 = y(x_0,x_1,x$ $-D_4(x_0+x_1+x_2)$

$A_1 = y(x_0,x_1) - D_3(x_0+x_1) + D_4(x_0x_1+x_1x_2 + x_0x_2)$

$A_0 = y_0 - D_2x_0 + D_3x_0x_1 - D_4x_0x_1x$

con esto el polinomio queda como

$P(x) = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$

donde A_3 es ce si el pol. es 2º grado.

se presentan A_3, A_2, A_1, (A_3 no se presenta si es d

- se utiliza el flag 0
- id. etiquetas A,B,0,1,2,3,4,5,7,9
- id. registros I,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,.0
- id. en total 133 pasos de programa
- se recomienda moda FIX 4
- id. cualquier moda angular

I A_3

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_0	Y_0	X_1	Y_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3	A_0	A_1
.0 A_2	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
R/S	74	$2^{\underline{o}}$ grado)
RCL .0	24. .0	
RTN	25.12	
* LBL 0	25.13. 0	subrutina aux.
-	41	
R↓	15.22	para el cálculo
-	41	
R↑	14.22	de diferencias
/	71	
RTN	25.12	
* LBL 3	25.13. 3	subrutina aux.
0	0	si el polinomio
STO I	23.14.23	es de $2^{\underline{o}}$ grado
GTO 4	22. 4	
* LBL B	25.13.12	cálculo de P(x)
ENTER	31	
ENTER	31	dado x
ENTER	31	
RCL I	24.14.23	puede ser utili
x	61	zado para hallar
RCL 9	24. 9	la integral o
+	51	los ceros de
x	61	P(x), utilizan-
RCL 8	24. 8	do las funciones
+	51	
x	61	$\boxed{\text{INT}\int_y^x}$ y $\boxed{\text{SOLVE}}$
RCL .0	24. .0	
+	51	
RTN	25.12	

REGISTERS

I A_3									
0 X_0	1 Y_0	2 X_1	3 Y_1	4 X_2	5 Y_2	6 X_3	7 Y_3	8 A_0	9 A_1
.0 A_2	.1	.2	.3	.4					

ANALISIS ARMONICO

1.- Descripción.- Dados N datos, $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$, correspondientes a N abcisas igualmente espaciadas, el programa calcula los armónicos correspondientes a la representación de estos datos en serie de Fourier. Se distinguen dos casos:

a) N impar = 2L+1

-tenemos un nº impar de argumentos N = 2L+1, , x=0,1,2,..., 2L

-los armónicos a_k, b_k vienen dados por:

$$a_k = \frac{2}{2L+1} \sum_{x=0}^{2L} y(x) \cos \frac{2\pi}{2L+1} kx \quad , \; k = 0,1,\ldots,L$$

$$b_k = \frac{2}{2L+1} \sum_{x=0}^{2L} y(x) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2L+1} kx \quad , \; k = 1,2,\ldots,L$$

$$y(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{L} \left(a_k \cos \frac{2\pi}{2L+1} kx + b_k \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2L+1} kx \right)$$

b) N par = 2L

-los argumentos son N = 2L , x = 0,1,2,...,2L-1

$$a_k = \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{2L-1} y(x) \cos \frac{\pi}{L} kx \; , \; k = 0,1,\ldots,L$$

$$b_k = \frac{1}{L} \sum_{x=0}^{2L-1} y(x) \operatorname{sen} \frac{\pi}{L} kx \; , \; k = 1,2,\ldots,L-1$$

$$y(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{L-1} \left(a_k \cos \frac{\pi}{L} kx + b_k \sin \frac{\pi}{L} kx\right) + \frac{1}{2} a_L \cos \pi x$$

-el valor de las ordenadas , x_k, no se tiene en cuenta en el programa, puesto que el valor de los armónicos es independiente de ellas, en tanto sean igualmente espaciadas. Para la síntesis armónica sería preciso tener en cuenta el cambio de escala adecuado.

-el programa calcula simultaneamente y almacena hasta un máximo de 5 armónicos (ak, bk), además del valor medio $a_0/2$. El número necesario de armónicos es elegido por el programa , igual a INT(N/2) ; es decir, 6 datos requieren 3 armónicos (a_k, b_k), 7 datos, también , 8 datos requieren 4 armónicos, etc. El nº de datos N puede ser cualquiera , $N \geq 2$. En caso de ser $N > 11$, se calculan un máximo de 5 armónicos.

-cualquier error cometido en la introducción de datos puede ser corregido excepto y_0 . Los armónicos pueden revisarse despues de presentados.

2.- Utilización .- introducir el programa

(1) -intr. nº de datos: N [A] → N-1 ; y_{N-1} [R/S] → N-2 ; y_{N-2} [R/S] → N-

... y_0 [R/S] → $\frac{1}{2} a_0$ (valor medio en el periodo)

	[R/S] → (1)	→ a_1	[R/S]	→ b_1	
k = nº de ármónicos =	[R/S] → (2)	→ a_2	[R/S]	→ b_2	
= INT(N/2) ó 5	......	....	....	....	
	[R/S] → (k)	→ a_k	[R/S]	→ b_k	[R/S] → 0.0000

(2) para revisar los armónicos calculados: [B] → $\frac{1}{2} a_0$, [R/S] → etc,

(3) para corregir un error, ver este ejemplo:

y_k erroneo [R/S] → k-1 , ¡ha habido un error!

-pulsar : $\boxed{GSB\ 9}$ → k

y_k correcto $\boxed{R/S}$ → k-1 , etc.

3.- Ejemplos .-

(1) Tenemos los siguientes datos pertenecientes a una función periódica, de periodo T = 7 . Realizar su análisis armónico:

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	1	3	4	2	0	6	5

- son 7 datos: 7 $\boxed{A}$ → 6.0000

5 $\boxed{R/S}$ → 5.0000

6 $\boxed{R/S}$ → 4.0000 ; 2 $\boxed{R/S}$ → 3.0000 , error, no era 2, es 0

$\boxed{GSB\ 9}$ → 4.0000 ; 0 $\boxed{R/S}$ → 3.0000 ; 2 $\boxed{R/S}$ → 2.0000

4 $\boxed{R/S}$ → 1.0000 ; 3 $\boxed{R/S}$ → 0.0000 ; 1 $\boxed{R/S}$ → 3.0000 ($\frac{1}{2}a_0$ = v. medic

$\boxed{R/S}$ → (1) → 0.5602 (a_1) $\boxed{R/S}$ → -0.7559 (b_1)

$\boxed{R/S}$ → (2) → -2.4408 (a_2) $\boxed{R/S}$ → -0.7559 (b_2)

$\boxed{R/S}$ → (3) → -0.1194 (a_3) $\boxed{R/S}$ → 0.7559 (b_3) $\boxed{R/S}$ → 0.0000

es decir, hemos obtenido

$a_0/2$ = 3.0000
a_1 = 0.5602 ; b_1 = -0.7559
a_2 = -2.4408 ; b_2 = -0.7559
a_3 = -0.1194 ; b_3 = 0.7559

(2) Tenemos la siguiente función definida en $(0,2\pi)$ como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le \pi/2 \\ \pi/2 & \text{si } \pi/2 \le x \le \pi \\ 0 & \text{si } \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

y en cualquier otra parte, $f(x+2\pi) = f(x)$. Realizar su análisis armónico aproximado, tomando 16 puntos de la gráfica.

x	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π	$9\pi/8$	$5\pi/4$	$11\pi/8$	$3\pi/2$	$13\pi/8$	$7\pi/4$	$15\pi/8$
y	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/4$	0	0	0	0	0	0	0

16 $\boxed{A}$ → 15.0000
0 $\boxed{R/S}$ → 14.0000
0 $\boxed{R/S}$ → 13.0000
0 $\boxed{R/S}$ → 12.0000

0 $\boxed{R/S}$ → 11.0000 ; 0 $\boxed{R/S}$ → 10.0000 ; 0 $\boxed{R/S}$ → 9.0000
0 $\boxed{R/S}$ → 8.0000 ; $\pi/4$ $\boxed{R/S}$ → 7.0000 ; $\pi/2$ $\boxed{R/S}$ → 6.0000
$\pi/2$ $\boxed{R/S}$ → 5.0000 ; $\pi/2$ $\boxed{R/S}$ → 4.0000 ; $\pi/2$ $\boxed{R/S}$ → 3.0000
$3\pi/8$ $\boxed{R/S}$ → 2.0000 ; $\pi/4$ $\boxed{R/S}$ → 1.0000 ; $\pi/8$ $\boxed{R/S}$ → 0.0000

0 $\boxed{R/S}$ → 0.5890 ($\frac{1}{2}a_0$ = valor medio)

$\boxed{R/S}$ → (1) → -0.3224 (a_1) ; $\boxed{R/S}$ → 0.8160 (b_1)
$\boxed{R/S}$ → (2) → -0.1676 (a_2) ; $\boxed{R/S}$ → -0.2370 (b_2)
$\boxed{R/S}$ → (3) → -0.0398 (a_3) ; $\boxed{R/S}$ → 0.1072 (b_3)
$\boxed{R/S}$ → (4) → 0.0000 (a_4) ; $\boxed{R/S}$ → -0.0982 (b_4)
$\boxed{R/S}$ → (5) → -0.0178 (a_5) ; $\boxed{R/S}$ → 0.0833 (b_5) $\boxed{R/S}$ → 0.0000

HP 34 C

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE
*	LBL A	25.13.11
	CF 0	25.61. 0
	CF 2	25.61. 2
	CF 3	25.61. 3
5	RAD	15.12
	CL REG	14.33
	STO .3	23..3
	1	1
	-	41
10	STO 6	23. 6
*	LBL 0	25.13. 0
	RCL 6	24. 6
	x=0	15.71
	SF 2	25.51. 2
15	F? 0	25.71. 0
	RCL .2	24..2
	F? 0	25.71. 0
	CHS	32
	F? 0	25.71. 0
20	GTO 7	22. 7
	R/S	74
	RCL .3	24..3
	/	71
	2	2
25	x	61
*	LBL 7	25.13. 7
	STO .2	23..2
	GSB 4	13. 4
	STO I	23.14.23
30 *	LBL 1	25.13. 1
	RCL 6	24. 6
	2	2
	x	61
	π	25.73
35	x	61
	RCL .3	24..3
	/	71
	RCL I	24.14.23
	x	61
40	RCL .2	24..2
	P→R	14. 4
	STO+(i)	23.51.24
	x≷y	21
	GSB 2	13. 2
45	STO+(i)	23.51.24
	GSB 2	13. 2
	CF 3	25.61. 3
	DSE	15.23
	GTO 1	22. 1
50	RCL .2	24..2
	2	2
	/	71
	STO+ 0	23.51. 0
	F? 2	25.71. 2
55	GTO B	22.12

preparación de los cálculos: quita los flags adecuados, prepara la moda en radianes, y almacena el nº de datos en R.3

decide si el dato debe añadirse a las sumatorias de cada armónico, o bien debe suprimirse de las mismas, debido a un error anterior.

realización de las sumatorias para cada armónico.

los términos en seno y coseno no se generan simultaneamente mediante la conversión de polares a rectangulares.

cada término se suma a su registro correspondiente, utilizando direccionamiento indirecto

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE
	1	1
	F? 0	25.71. 0
	CL X	34
	F? 0	25.71. 0
60	CF 0	25.61. 0
	STO- 6	23.41. 6
	GTO 0	22. 0
*	LBL B	25.13.12
	RCL 0	24. 0
65	R/S	74
	GSB 4	13. 4
	EEX	33
	3	3
	/	71
70	STO I	23.14.23
	ISG	15.24
*	LBL 3	25.13. 3
	CF 3	25.61. 3
	RCL I	24.14.23
75	FIX 0	14.11. 0
	PAUSE	25.74
	FIX 4	14.11. 4
	RCL (i)	24.14.24
	R/S	74
80	GSB 2	13. 2
	RCL (i)	24.14.24
	GSB 2	13. 2
	R/S	74
	ISG	15.24
	GTO 3	22. 3
	CL X	34
	RTN	25.12
	LBL 4	25.13. 4
	5	5
90	RCL .3	24..3
	2	2
	/	71
	INT	25.32
	x>y	14.51
95	x≷y	21
	RTN	25.12
*	LBL 9	25.13. 9
	CF 2	25.61. 2
	SF 0	25.51. 0
100	1	1
	STO+ 6	23.51. 6
	GTO 0	22. 0
*	LBL 2	25.13. 2
	x≷I	14.21

actualiza el número del dat siguiente que hay que solicitar.

presentación d los armónicos: primero, el valor medio, a_0

despues, a_k y b_k precedidos de su k correspondiente.

el k se presenta en FIX 0, d rante una pau y los ak,bk, en FIX 4, pulsando R/S.

Al final, se presenta 0.00(en pantalla.

sub. auxiliar, determina el nº de armónico a calcular,

k = INT(N/2) ó 5, el que sea menor.

borrado de dat incorrectos, prepara los fl adecuados, y actualiza el contador del r de datos

- se utilizan los flags 0,2,3
- id. etiquetas A,B,0,1,2,3,4,7,9
- id. registros 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,.0,.1,.2,. I
- id. en total 111 pasos de programa
- id. modas FIX 0 y FIX 4
- id. moda RAD

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{2}a_0$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	k	b_1	b_2	b_3
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
b_4	b_5	yk	n						

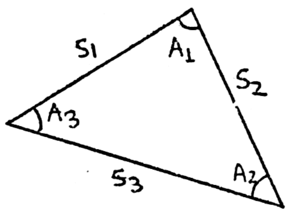
STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
105	6	6	sub. auxiliar,
	F? 3	25.71. 3	permite direccio-
	CHS	32	nar indirecta-
	+	51	mente de R7 a
	x≷I	14.21	R.1, en vez de
110	SF 3	25.51. 3	R1 a R6 .
	RTN	25.12	

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{2}a_0$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	k	b_1	b_2	b_3
.0 b_4	.1 b_5	.2 y_k	.3 n	.4					

RESOLUCION DE TRIANGULOS

1.- Descripción .- Este programa puede utilizarse para resolver cualquier caso de trigonometría plana: Dados 3 datos cualesquier que determinen totalmente un triangulo, pueden ser hallados los otros 3 restantes, asi como el area.



Se distinguen 5 casos fundamentales: siguiendo el convenio de nomenclatura de la figura:

caso 1) S_1, A_3, A_1 (conocidos 2 ángulos y el lado común)

casó 2) S_1, A_2, A_1 (conocido 1 lado y los 2 ángulos siguientes)

caso 3) S_1, S_2, S_3 (los tres lados conocidos)

caso 4) S_1, A_1, S_2 (conocidos dos lados y el ángulo común)

caso 5) S_1, S_2, A_2 (conocidos dos lados y el ángulo adyacente)

- las fórmulas empleadas son las siguientes:

caso 1 .- $A_2 = \cos^{-1}(-\cos(A_3 + A_1))$; $S_2 = S_1 \dfrac{\sin A_3}{\sin A_2}$

$S_3 = S_1 \cos A_3 + S_2 \cos A_2$

caso 2 .- $A_3 = \cos^{-1}(-\cos(A_1 + A_2))$,y queda reducido al caso 1

caso 3 .- $A_3 = 2\cos^{-1}\sqrt{P(P-S_2)/S_1S_3}$; $A_1 = \cos^{-1}(-\cos(A_3 + A_2))$

$A_2 = 2\cos^{-1}\sqrt{P(P-S_1)/S_2S_3}$; $P = (S_1 + S_2 + S_3)/2$

caso 4 .- $S_3 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos A_1}$, y queda reducido al caso 3

caso 5 .- $A_3 = \sin^{-1}\left(\dfrac{S_2}{S_1} \sin A_2\right)$; $A_1 = \cos^{-1}(-\cos(A_2 + A_3))$

y queda reducido al caso 1

2.- Utilización .-

(1) Introducir el programa; ejecutar uno de estos 5 casos:

(2) S_1 [ENTER] A_3 [ENTER] A_1 [A] → (ver ✱)

(3) S_1 [ENTER] A_2 [ENTER] A_1 [B] → (ver ✱)

(4) S_1 [ENTER] S_2 [ENTER] S_3 [GSB 7] → (ver ✱)

(5) S_1 [ENTER] A_1 [ENTER] S_2 [GSB 8] → (ver ✱)

(6) S_1 [ENTER] S_2 [ENTER] A_2 [GSB 9] → (ver ✱)

Nota: la moda angular puede ser cualquiera; en caso de grados, so grados decimales, no G

(✱) en todos los casos, los datos de salida son:

→ S_1 [R/S] → A_1 [R/S] → S_2 [R/S] → A_2 [R/S] → S_3 [R/S] → A_3 [R/S] → AREA

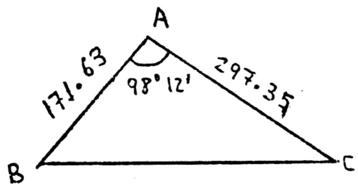
(7) Para revisar los datos calculados :

[GSB 2] → (ver ✱)

(8) Para otro caso, ir al paso adecuado.

3.- Ejemplos .-

(1) - Un agrimensor debe encontrar las dimensiones y area de una parcela de forma triangular. Se miden las distancias a B y C desde el punto A , utilizando un medidor electrónico. El ángulo entre AB y AC es medido asimismo. Se pide encontrar las restantes dimensiones y el area de la parcela.



- este es un problema del caso 4 , 2 lados y el ángulo común:

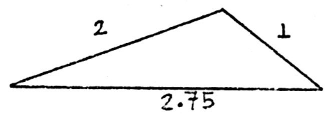
- introducimos datos: 171.63 [ENTER]

98.12 [g→H] 297.35 [GSB 8] → 171.63 (S_1)

[R/S] → 98.20 (A_1) [R/S] → 297.35 (S_2) [R/S] → 27.83 (A_2)

[R/S] → 363.91 (S_3) [R/S] → 53.97 (A_3) [R/S] → 25256.21 (Area)

(2) - Hallar el area y los ángulos de un triángulo cuyos lados miden 2 m , 1 m , 2.75 m .



-evidentemente es un problema del tipo 3, los 3 lados conocidos:

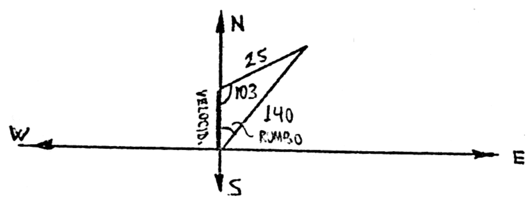
-introducimos datos: 2 [ENTER] 1 [ENTER] 2.75

[GSB 7] → 2.00 (S_1)

[R/S] → 129.84 (A_1) [R/S] → 1.00 (S_2) [R/S] → 33.95 (A_2)

[R/S] → 2.75 (S_3) [R/S] → 16.21 (A_3) [R/S] → 0.77 (Area en m^2)

(3) - Un piloto desea volar en dirección Norte. El servicio meteorológico reporta viento de velocidad 25 nudos en dirección 77º. Pues to que los vientos suelen indicarse en dirección contraria a la que soplan, esto se interpreta como 77 + 180 = 257 º . La velocidad del avión es de 140 nudos. ¿Que rumbo debe tomar ? ¿Cual es la velocidad respecto del suelo ?



Restando de 180 la dirección del viento, esto se reduce a un pro blema del tipo 5. (180 - 77 = 103)

- introducir datos: 140 [ENTER] 25 [ENTER] 103 [GSB 9] → 140.00 (S_1)

[R/S] → 66.98 (A_1) [R/S] → 25.00 (S_2) [R/S] → 103.00 (A_2)

[R/S] → 132.24 (S_3) [R/S] → 10.02 (A_3) [R/S] → 1610.64 (area)

es decir, el piloto debe tomar un rumbo de 10.02 º hacia el NE, y su velocidad con respecto al suelo es de 132.24 nudos.

HP 34 C

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL B	25.13.12	caso S1, A2, A1
	STO 4	23. 4	$A3=\cos^{-1}(-\cos(A1+$
	GSB 0	13. 0	$+A2))$
	RCL 4	24. 4	
5 *	LBL A	25.13.11	caso S1, A3, A1
	STO 4	23. 4	
	x≷y	21	$A2=\cos^{-1}(-\cos(A1+$
	STO 0	23. 0	
	GSB 0	13. 0	$+A3))$
10	STO 2	23. 2	
	SIN	14. 7	S2=S1.sinA3/sinA2
	RCL 0	24. 0	
	SIN	14. 7	S3=S1cosA3 +
	x≷y	21	
15	÷	71	+S2cosA2
	x≷y	21	
	STO 5	23. 5	
	x	61	
	STO 3	23. 3	
20	RCL 2	24. 2	
	COS	14. 8	
	x	61	
	RCL 5	24. 5	
	RCL 0	24. 0	
25	COS	14. 8	
	x	61	
	+	51	
	STO 1	23. 1	
*	LBL 2	25.13. 2	subrutina de presentación:
30	5	5	
	CHS	32	presenta sucesivamente S1, A1
	STO I	23.14.23	S2, A2, S3, A3
*	LBL 3	25.13. 3	
	RCL (i)	24.14.24	
35	R/S	74	
	ISG	15.24	y finalmente calcula el area
	GTO 3	22. 3	por la fórmula
	RCL 5	24. 5	
	RCL 1	24. 1	
40	x	61	$A=\frac{S1S3\sin A3}{2}$
	RCL 0	24. 0	
	SIN	14. 7	
	x	61	
	2	2	
45	÷	71	
	RTN	25.12	
*	LBL 8	25.13. 8	caso S1, A1, S2
	STO 3	23. 3	
	x≷y	21	
50	STO 4	23. 4	
	COS	14. 8	
	x	61	
	x≷y	21	
	STO 5	23. 5	
55	x	61	

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	2	2	$S3=(S1^2+S2^2-$
	x	61	$-2S1S2\cos A1)^{1/2}$
	RCL 5	24. 5	
	x^2	15. 3	
60	RCL 3	24. 3	
	x^2	15. 3	
	+	51	
	x≷y	21	
	-	41	
65	√	14. 3	
	STO 1	23. 1	
	RCL 5	24. 5	
	RCL 3	24. 3	
	RCL 1	24. 1	
70 *	LBL 7	25.13. 7	caso S1, S2, S3
	STO 1	23. 1	$A3=2\cos^{-1}(P(P-S2)/S1S3)^{1/2}$
	x≷y	21	
	STO 3	23. 3	
	+	51	
75	x≷y	21	
	STO 5	23. 5	$A2=2\cos^{-1}(P(P-S1)/S2S3)^{1/2}$
	+	51	
	2	2	
	÷	71	
80	STO I	23.14.23	$A1=\cos^{-1}(-\cos($
	RCL 3	24. 3	$A3+A2))$
	-	41	
	RCL I	24.14.23	
	x	61	
	RCL 5	24. 5	donde P =
	GSB 1	13. 1	
	STO 0	23. 0	=(S1+S2+S3)/2
	RCL I	24.14.23	
	RCL 5	24. 5	
90	-	41	
	RCL I	24.14.23	
	x	61	
	RCL 3	24. 3	
	GSB 1	13. 1	
95	STO 2	23. 2	
	RCL 0	24. 0	
	GSB 0	13. 0	
	STO 4	23. 4	
	GTO 2	22. 2	
100 *	LBL 9	25.13. 9	caso S1, S2, A2
	STO 2	23. 2	$A3=\sin^{-1}((S_2.$
	SIN	14. 7	
	x≷y	21	
	STO 3	23. 3	

- se utilizan etiquetas A, B, 0, 1, 2, 3, 7, 8, 9
- id. registros I, 0, 1, 2, 3, 4, 5
- no id. ningun flag
- id. en total 132 pasos de programa
- se recomienda moda FIX 2
- id. moda DEG

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A_3	S_3	A_2	S_2	A_1	S_1				
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
105	x	61	. sinA2)/S1)
	x≷y	21	
	STO 5	23. 5	
	/	71	
	SIN-1	15. 7	$A1 = \cos^{-1}(-\cos($
110	STO 0	23. 0	$A2 + A3))$
	RCL 2	24. 2	
	GSB 0	13. 0	
	STO 4	23. 4	y queda reduci-
	RCL 5	24. 5	do al caso
115	RCL 0	24. 0	A3, S1, A1
	RCL 4	24. 4	
	GTO A	22.11	
	* LBL 0	25.13. 0	subrutina aux.
	+	51	
120	COS	14. 8	
	CHS	32	
	COS-1	15. 8	
	RTN	25.12	
	LBL 1	25.13. 1	subrutina auxil.
125	/	71	
	RCL 1	24. 1	
	/	71	
	√	14. 3	
	COS-1	15. 8	
130	2	2	
	x	61	
	RTN	25.12	

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A3	S3	A2	S2	A1	S1				

TABLAS DE AMORTIZACION

1.- Descripción .- El programa puede imprimir una tabla completa de amortización de un préstamo, mostrando para cada periodo el monto correspondiente al interés , la parte correspondiente al capital, y el saldo pendiente.

Puede calcularse una tabla parcial entre dos periodos P_1, P_2 , cualesquiera, e incluso para un único periodo . Al final del trabajo de tabulación se muestran los totales pagados en concepto de capital e intereses entre los dos periodos dados.

Conocido el tanto por ciento , i% , el pago periódico , PMT , y el monto del empréstito , PV , el programa genera una tabla de amortización entre dos periodos especificados , $P1$ y $P2$ (ó bien en un solo periodo, para lo cual basta hacer $P1 = P2$) .

La tabla refleja para cada periodo P_i , comprendido entre $P1$ y P_2 (ambos inclusive) , el monto correspondiente al interes, el pagado en concepto de capital , asi como el saldo pendiente, y una vez que todos los periodos han sido mostrados , aparece en pantalla el total pagado en conceptos de capital e intereses durante esos periodos.

2.- Utilización .-

(1) -introducir i% , PMT , PV :

i $\boxed{\text{ENTER}}$ PMT $\boxed{\text{ENTER}}$ PV $\boxed{\text{A}}$ → i

(2) -introducir los periodos extremos, y calcular la tabla:

P_1 $\boxed{\text{ENTER}}$ P_2 → tabla de amortización

desde $P_1 \leq P_k \leq P_2$ $\left\{ \begin{array}{ll} P_k & \text{(periodo k-ésimo)} \\ \text{INT} & \text{(monto correspo. al interés)} \\ \text{PRN} & \text{(id. id. al capital)} \\ \text{BAL} & \text{(saldo pendiente)} \end{array} \right.$

y finalmente → ΣINT (importe total pagado como interés)

→ ΣPRN (id. id. id. como capital)

3.- Notas .-

- para otros periodos con los mismos i%,PMT,PV,ir a (2) puesto que estos valores permanecen inalterados
- para un único periodo P , hacer $P_1 = P_2 = P$ .Entonces ΣINT y ΣPRN no tienen interés.
- i% debe introducirse como tanto por 1 : es decir, 9 % se introduce así: 0.09 . Igualmente , 148 % se introduce como 1.48 ,etc.
- para cambiar i% , PMT , PV , ir a (1) ó almacenar el nuevo valor (o valores) en el registro(s) adecuado. (ver listados)

4.- Ejemplos .-

(1) (ejemplo tomado del folleto publicitario de la HP-92 INVESTOR)

Un inversionista desea comprar un almacén , y para ello recibe un préstamo de 100000 dólares , a un plazo de 20 años al 9 % de interés . Pretende generar una tabla de amortización para los primeros 5 años , suponiendo pagos anuales de 10954.65 dólares.

SOLUCION : - introducir el tipo de interés , el pago anual, y el valor del préstamo :

0.09 [ENTER] 10954.65 [ENTER] 100000 [A] → 0.09

-introducir periodos extremos:

1 [ENTER] 5 [B]	→ 1	Periodo 1	P
	→ 9000.00	monto corresp.al interés	INT
	→ 1954.65	monto corresp.al capital	PRN
	→ 98045.35	saldo pendiente	BAL
	→ 2	Periodo 2	P
	→ 8824.08	monto corresp.al interés	INT
	→ 2130.57	monto corresp.al capital	PRN
	→ 95914.78	saldo pendiente	BAL
	→ 3	Periodo 3	P
	→ 8632.33	monto corresp.al interés	INT
	→ 2322.32	monto corresp.al capital	PRN
	→ 93592.46	saldo pendiente	BAL
	→ 4	Periodo 4	P
	→ 8423.32	monto corresp.al interés	INT
	→ 2531.33	monto corresp.al capital	PRN
	→ 91061.13	saldo pendiente	BAL
	→ 5	Periodo 5	P
	→ 8195.50	monto corresp.al interés	INT
	→ 2759.15	monto corresp.al capital	PRN
	→ 88301.99	saldo pendiente	BAL
	→ 43075.24	total corresp.al interes	∑INT
	→ 11698.01	total corresp.al capital	∑PRN

Ahora, supongamos que el inversionista desea conocer los datos correspondientes al periodo 15. Pulsar:

-) 15 [ENTER] [B]	→ 15	Periodo 15	P
	→ 4422.74	monto corresp.al interés	INT
	→ 6531.91	monto corresp.al capital	PRN
	→ 42609.69	saldo pendiente	BAL
	→ 4422.74	total corresp.al interés	∑INT
	→ 6531.91	total corresp.al capital	∑PRN

Como puede verse , el programa duplica la función [AMORT] de la HP-92 INVESTOR . Las instrucciones PAUSE en los pasos 029, 034,039,044,048 pueden duplicarse para una mayor permanencia del resultado en pantalla, o bien sustituirse por R/S

HP 34 C

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL A	25.13.11	
	STO 3	23. 3	almacena PV
	R↓	15.22	
	STO 2	23. 2	almacena PMT
5	R↓	15.22	
	STO 1	23. 1	alamcena i
	RTN	25.12	
*	LBL B	25.13.12	
	EEX	33	introduce
10	3	3	$P_1.OOP_2$ en el
	/	71	
	+	51	registro índice
	STO I	23.14.23	para llevar
	0	0	cuenta de los
15	STO 0	23. 0	periodos
	STO 6	23. 6	
*	LBL 0	25.13. 0	deja a 0 los
	RCL I	24.14.23	registros em-
	INT	25.32	pleados en las
20	STO 4	23. 4	sumatorias
	GSB 1	13. 1	
	ENTER	31	
	GSB 1	13. 1	
	-	41	
25	RCL 2	24. 2	
	+	51	
	RCL I	24.14.23	
	FIX 0	14.11. 0	
	PAUSE	25.74	presenta P
30	FIX 2	14.11. 2	
	RCL 2	24. 2	
	R↑	14.22	
	R↑	14.22	
	PAUSE	25.74	presenta INT
35	STO+ 6	23.51. 6	
	x≷y	21	
	R↓	15.22	
	-	41	
	PAUSE	25.74	presenta PRN
40	STO+ 0	23.51. 0	
	x≷y	21	
	LAST X	25. 0	
	R↑	14.22	
	PAUSE	25.74	presenta BAL
45	ISG	15.24	
	GTO 0	22. 0	
	RCL 6	24. 6	
	PAUSE	25.74	presenta ΣINT
	RCL 0	24. 0	
50	RTN	25.12	
*	LBL 1	25.13. 1	
	RCL 1	24. 1	
	1	1	
	+	51	
55	RCL 4	24. 4	

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	CHS	32	
	y^x	25. 3	subrutina
	STO 5	23. 5	auxiliar
	1	1	
60	STO- 4	23.41. 4	lleva a cabo
	-	41	los cálculos
	RCL 1	24. 1	de cada peri
	/	71	do, y actual
	RCL 2	24. 2	za datos
65	x	61	
	RCL 3	24. 3	
	+	51	
	RCL 5	24. 5	
	/	71	
70	RTN	25.12	

-no se utiliza ningun flag
-se utilizan las etiquetas A,B,0,1
- id. registros I,0,1,2,3,4,5,6
- id. en total 70 pasos de programa
-se recomienda moda FIX 2
- id. cualquier moda angular

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ΣPRN	i	PMT	PV	P	usado	ΣINT			
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

CALENDARIO

1.- Descripción .-

Este programa permite resolver la mayor parte de los problemas relacionados con fechas. Su rango de validez abarca desde el 1 de marzo de 1900 - hasta el 28 de febrero de 2100. El programa tiene en consideración los años bisiestos y la diferente duración de los meses.

Sus funciones son las siguientes:

-dadas dos fechas cualesquiera , expresadas como DD.MMAAAA , halla el número de días que hay entre las dos.

-dada una fecha, y el número de dias que la separan de otra fecha pasada o futura, halla esta segunda fecha.

-dada una fecha cualquiera, indica que día de la semana es, de acuerdo a la convención que se indicará:

convenciones:

-las fechas se introducen y se calculan como DD.MMAAAA donde:

DD = dia (1 a 31)
MM = mes (01 a 12)
AAAA = año (1900 a 2100)

-el dia de la semana se representa con un nº de 1 a 7:

1 = LUNES, 2 = MARTES, ... , 7 = DOMINGO

2.- Utilización .-

(1) Introducir el programa ; ejecutar uno de estos 3 casos:

(2) para hallar los dias entre fechas:

-introducir fechas: fecha_1 $\boxed{\text{ENTER}}$ fecha_2 $\boxed{\text{A}}$ → Δ (nº de dias)

(3) para hallar una fecha a partir de otra y un nº de dias entre ell

-introducir datos: fecha_1 $\boxed{\text{ENTER}}$ Δ $\boxed{\text{B}}$ → fecha_2

(4) para hallar que día de la semana es determinada fecha:

-introducir datos: fecha $\boxed{\text{GSB 7}}$ → dia de la semana (1=LUNES,et

(5) para otro caso, ir al paso adecuado

3.- Notas .-

- despues de (2) ó (3) los datos y resultados quedan almacenados asi:

R0	Δ (nº de dias entre fechas)
R1	fecha_1
R2	fecha_2

-los datos se presentan siempre con la moda FIX adecuada: FIX 0 para nº de dias y FIX 6 para fecha_2.

-el Δ (nº de dias) puede ser negativo, permitiendo el cálculo de fechas pasadas. Si fecha_1 es posterior a fecha_2, el nº de dias resultará negativo, y en caso contrario, positivo.

-es importante expresar los meses como 01, 02, ... 12. Suprimir el cero inicial será causa de error.

4.- Ejemplo.-

¿Cuantos dias hay de diferencia entre el 28 de febrero del 80 y el 1 de marzo del mismo año? ¿y si el año fuese el 79, en vez del 80 ?

28.021980 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1.031980 $\boxed{\text{A}}$ → 2 dias (el 80 es bisiesto)

28.021979 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1.031979 $\boxed{\text{A}}$ → 1 dia (el 79 , no)

¿Cuantos dias faltan para el año 2000 (hoy es 2 de nov. 79)?

2.111979 $\boxed{\text{ENTER}}$ 1.012000 $\boxed{\text{A}}$ - 7365 (faltan 7365 dias para el 2000)

¿Que fecha es 5000 dias a partir de hoy?

$\boxed{\text{RCL 1}}$ 5000 $\boxed{\text{B}}$ → 11.071993 , el 11 de julio de 1993

¿ Y 5000 dias hacia el pasado ?

$\boxed{\text{RCL 1}}$ -5000 $\boxed{\text{B}}$ → 23.021966 , el 23 de febrero de 1966

por cierto, el siglo XX acabara en: 31.121999 $\boxed{\text{GSB 7}}$ → 5 (viernes)

HP 34 C

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
*	LBL A	25.13.11	Fecha$_1$=DD/MMAAAA
	STO 2	23. 2	
	x≷y	21	Fecha$_2$=DD/MMAAAA
	STO 1	23. 1	
5	x≷y	21	
	GSB 0	13. 0	se hallan D(1) y
	STO 0	23. 0	D(2), donde
	RCL 1	24. 1	
	GSB 0	13. 0	D=INT(365.25A')+
10	STO- 0	23.41. 0	+INT(30.6001M')+
	RCL 0	24. 0	+D
	FIX 0	14.11. 0	
	RTN	25.12	
*	LBL 7	25.13. 7	calcula el dia
15	GSB 0	13. 0	de la semana:
	GSB 1	13. 1	
	7	7	halla D(D), y
	÷	71	entonces
	FRAC	25.33	
20	7	7	DDS=7xFRAC((D(D)
	x	61	
	x=0	15.71	+12)/7)
	LAST X	25. 0	
	FIX 0	14.11. 0	y si DDS=0 ⇨7
25	RTN	25.12	
*	LBL 0	25.13. 0	calcula D(D)
	CF 0	25.61. 0	
	INT	25.32	por la formula
	LAST X	25. 0	expresada más
30	FRAC	25.33	arriba, donde:
	EEX	33	
	2	2	A'= AÑO-1 si
	x	61	
	INT	25.32	m=1 ó 2
35	LAST X	25. 0	
	FRAC	25.33	A'= AÑO si m>2
	EEX	33	
	4	4	M'= MES+13 si
	x	61	
40	x≷y	21	m=1 ó 2
	1	1	
	+	51	M'= MES+1 si
	4	4	
	x>y	14.51	m >2
45	SF 0	25.51. 0	
	R↓	15.22	entonces, el
	F? 0	25.71. 0	
	GSB 1	13. 1	número de dias
	GSB 3	13. 3	
50	x	61	
	INT	25.32	
	x≷y	21	
	0	0	
	F? 0	25.71. 0	
55	e^x	15. 1	

STEP/LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
	-	41	entre dos fe-
	GSB 4	13. 4	chas es
	x	61	
	INT	25.32	Δ =D(2)-D(1)
60	+	51	
	+	51	
	CF 0	25.61. 0	
	RTN	25.12	
*	LBL 1	25.13. 1	subrutina aux.
65	1	1	
	2	2	suma 12
	+	51	
	RTN	25.12	
*	LBL B	25.13.12	para calcular
70	STO 0	23. 0	una fecha pas
	x≷y	21	da o futura,d
	STO 1	23. 1	da una fecha f
	GSB 0	13. 0	ja y el incre-
	RCL 0	24. 0	mento de días
75	+	51	entre ellas, s
	STO 2	23. 2	procede así:
	1	1	
	2	2	hallamos D(1)
	2	2	por las fórmu-
80	.	73	las anteriores
	1	1	Sumamos el in-
	-	41	cremento y ten
	GSB 4	13. 4	mos D(2). Ahor
	STO I	23.14.23	hay que hallar
85	÷	71	la fecha$_2$ que
	INT	25.32	
	ENTER	31	corresponde a
	x≷I	14.21	ese D(2). Para
	x	61	ello:
90	INT	25.32	
	STO- 2	23.41. 2	A'= INT((D(2)-
	RCL 2	24. 2	
	GSB 3	13. 3	-122.1)/365.2
	÷	71	
95	INT	25.32	M'= ((D(2)-INT
	ENTER	31	
	GSB 3	13. 3	365.25A')/30.60
	x	61	
	INT	25.32	D = D(2)-INT(
100	STO- 2	23.41. 2	
	x≷y	21	365.25A')- INT
	1	1	
	-	41	30.6001M')
	1	1	

- se utiliza el flag 0
- id. etiquetas A,B,0,1,2,3,4,7
- id. registros I,0,1,2
- id. en total 147 pasos de programa
- id. modas FIX 0 y FIX 6
- se recomienda cualquier moda angular

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δ	Fecha 1	Fecha 2							
.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

STEP/ LINE	KEY ENTRY	KEY CODE	COMMENTS
105	3	3	
	x≤y	14.41	donde :
	SF 0	25.51. 0	
	R↓	15.22	MES = M'- 13
	F? 0	25.71. 0	
110	GSB 2	13. 2	si M'= 14 ó 15
	F? 0	25.71. 0	
	ISG	15.24	MES = M'- 1 si
	ABS	25.34	
	RCL I	24.14.23	M'<14
115	EEX	33	
	4	4	AÑO = A'si m>2
	/	71	
	+	51	= A'+1 si
	EEX	33	
120	2	2	m = 1 ó 2
	/	71	
	STO+ 2	23.51. 2	
	RCL 2	24. 2	
	FIX 6	14.11. 6	
125	RTN	25.12	
*	LBL 2	25.13. 2	sub. auxiliar
	1	1	
	2	2	resta 12
	-	41	
130	RTN	25.12	
*	LBL 3	25.13. 3	sub.auxiliar
	3	3	
	0	0	escribe
	.	73	
135	6	6	30.6001
	0	0	
	0	0	en pantalla
	1	1	
	RTN	25.12	
140 *	LBL 4	25.13. 4	sub.auxiliar
	3	3	
	6	6	365.25 en pan-
	5	5	
	.	73	
145	2	2	talla
	5	5	
	RTN	25.12	

REGISTERS

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δ	Fecha 1	Fecha2							

MATEMATICA AVANZADA

CAMBIOS DE BASE
FACTORES PRIMOS, MCD, DECIMAL A FRACCION
ECUACION DE 4.° GRADO
SISTEMAS DE ECUACIONES
AREAS, LONGITUDES, VOLUMENES
INTEGRALES DOBLES
SUMA DE SERIES INFINITAS ALTERNADAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES
OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS
OPERACIONES VECTORIALES
DETERMINANTE, ECUACION CARACTERISTICA
INTERPOLACION
AJUSTE DE DATOS
ANALISIS ARMONICO
RESOLUCION DE TRIANGULOS

HEWLETT PACKARD

Impreso en España

Notes on the back story (1980) of this HP Solution Book and its 2021 scanning:

This book was created to enhance the sales of the then (1980) newly released **HP-34C** calculator, a fantastic advanced programmable *RPN* model, which was much more affordable than previous advanced models while providing a plethora of useful features both for using in manual calculations and for writing your own programs, including such ground-breaking capabilities as automatic memory allocation, built-in self tests, numerical integration and numerical root-finding (which could call one another for integration of implicit functions or, conversely, finding roots of functions defined by integrals). The advanced functionality and relatively low price made it highly appealing to technical students.

My friend Fernando del Rey and I set up to create a sufficient number of programs to be collected into a new *Hewlett-Packard* Spanish-language *Solutions Book* titled ***"HP-34C Matemática avanzada"***, which would be released and sold at a large Spanish trade show (*SIMO*) taking place in Madrid (Spain), together with the **HP-34C** itself, and we would personally attend the show at the *HP* section for a number of days, engaging visitors to try and sell them both the book and the calculator. We got one **HP-34C** from *HP* on loan and went on to learn how to best use it and create the programs for the book on the double.

In all, we created and submitted a grand total of 18 programs to *HP* (which I extensively documented, including keycodes, commented listings and examples) but *HP* selected for publication just the first 16 (from *"Cambios de Base" {Base Conversions}* to *"Resolución de Triángulos" {Triangle Solutions}*, both included), as they intended to strictly focus on math programs, to fit the book's title. As the book's target buyers were technical students (Engineering, Architecture, Science in general) we deemed that having a financial program and a calendar-functions program would be of help too, and would also add some variety to boot, but *HP* thought otherwise and these two programs got excluded from the book. A pity back then, but now I've righted this wrong by including them at the very end of the book.

All the same, the book sold very well. I personally sold many to students who attended the *HP* section during the days the *SIMO* lasted, as did Fernando, and we also heavily and successfully promoted and sold many **HP-34C** calculators as well. I sent one of the books to the Australian *PPC Melbourne Chapter*, which were very appreciative of my productions and published nearly all of them, plus they accepted me as a member of their Chapter, despite the immense distance between Madrid and Melbourne. It was extremely expensive to send the book due to its heavy weight and the distance (the antipodes of Madrid, 20.000 km far away, you couldn't send it farther while remaining on this planet) but fortunately it arrived in one piece, though the envelope was in the verge of losing one side (and thus the book itself).

So, I was deprived of my one and only copy, which I didn't regret at the time but 40 years later I really did. Fortunately, Fernando presented me with his own copy in pristine condition, a unique item for my *HP* collection. The problem is, I've tried and tried very hard but there's no way I can scan it without seriously damaging it. It's quite a thick volume (about 75+ pp in all), with large and stiff pages, and it won't bend graciously nor will the pages stand flat on the scanners bed, quite a heavy weight over it would be needed to simply make it stand a little flatter, and that can damage the pages and the scanner's bed itself.

To wit, I've found it impossible to scan, short of cutting the binding out (which I can't do cleanly) and then re-binding it, which I can't do either. This being so, I've opted for the next best solution: I've scanned the *original* pages we sent to HP for publication in 1980 (which I duly photocopied at the time before sending them, of course), and these are the main contents of the present PDF document you're reading.

Pros:

- These are the *exact original pages* we sent to *HP*, which *HP* then proceeded to publish and sell as a *Solution Book* for **the HP-34C**.

- I've included all 16 programs featured by *HP* in the book, plus the two rejected ones *("Loan Amortization Schedule" and "Calendar and Date Functions"*).

- I've also included scans of the *front cover* and the first two pages of the physical *Solutions Book* (which I used to test if scanning was feasible) as well as the *back cove*r of the actual book.

- These original pages are *error-free*, as I checked them exhaustively before sending them to *HP* for publication, while the published book had 21 errata (which I had to find out and document in a separate sheet, *"Fe de Erratas"*).

Cons:

- The photocopy shop clerk who did the photocopies was, regrettably, somewhat careless and didn't strive for careful alignment or placement of the original pages in the photocopy machine, so a few pages are slightly skewed and in a few instances one or two characters at the far right in the listing comments (not in the steps or keycodes) are truncated, nothing serious really.

Last but not least, you can be certain that this is a **unique** *HP* book that you are extremely unlikely to find anywhere, and which has been brought to the *HP*-calcs worldwide fan community after **41** years (as of 2021) of being carefully archived by yours truly. All 18 programs featured are of high quality, error free, and make the best use of the **HP-34C**'s advanced features. Most of them will run with little or no change on an *HP-15C*, and many will run in several *HP* models with little change, if at all, provided they fit in memory.

I hope you'll enjoy it !

Valentin Albillo, 29-08-2021