Notes on the back story of this document and its 2021 scanning:

The **HP-25** was my very first *HP* calculator. Back in 1975 I was about to enter University and I needed a powerful calculator. After being introduced to the *HP-21* and *RPN* by a classmate, I loved the concept and set my sights on getting one, but with the money already in hand the *HP-25* was announced, superficially similar but with lots of extra functionality and *programmable* to boot, so I immediately got the extra money to buy it. When it arrived, I was awed by its quality and capabilties and found the *Owner's Handbook* a real delight to read, and the many well-chosen, non-trivial, useful programs in the *Applications Manual* were extremely worthwhile to study and learn from them.

Previously I had written several "programs" (repetitive keystroke sequences) for my 4-function *Sears* calculator, so I rewrote them to run on the *HP-25*, with satisfactory results. I also wrote down on a notepad a few programs from the *Applications Manual* to study them, document them in my own handwriting and with my own examples, and once fully understood, even to go and improve them with my own optimizations or by adding extra functionality.

Soon enough I was writing and documenting my very own programs for it, which initially were quite simple, as I was learning the tricks of the trade on the go, but later became relatively complex, immediately useful to me while at University and, best of all, paving the way to writing much more advanced programs for other future calcs by *HP*.

In this particular document, I've collected a selection of ***40*** programs I wrote for it 46 years ago (as of 2021), which serve to demonstrate just how wonderful and capable the *HP-25* was back then, and the sheer enjoyment of owning it, learning from it, and making the most out of it. It made me an *HP* fan for life and did wonders for my then fledgling programming abilities, in the end completely shaping my future professional life for the best.

> ***Caveat lector****: Note that in 1975 I was utterly on my own as far as HP calculators were concerned. I knew nothing about PPC, or users' Clubs of any sort, nor any other HP-25 user. Thus, I developed all the programs here in isolation and documented them in my own handwriting and of course in Spanish, my native language, as they were not intended to be shared with anyone, much less English native speakers, as my English was self-taught and quite rudimentary at the time. Also, after 46 years the original pages are quite faded but still readable thanks to Eric's expert processing.*

List of the 40 Programs for the HP-25 included in this document *(60 pages in all)*:

Aritmética compleja: +, -, x, /, raiz n	*(Complex Arithmetic)*
Trigonometría compleja: sen(a+bi), cos(a+bi)	*(Complex Trigonometry: sin, cos)*
Evaluación de expresiones complejas	*(Complex Expression Evaluation)*
Evaluación de polinomios complejos	*(Complex Polynomial Evaluation)*
Trigonometría compleja: arcsen(a+bi), arccos(a+bi)	*(Complex Trigonometry: arcsin, arccos)*
Logaritmo y exponencial compleja	*(Complex Logarithm and Exponential)*
Evaluación polinómica: $y=a_1x^6+a_2x^5+...+a_5x^2+a_6x+a_7$	*(Polynomial Evaluation)*
Polinomio de colocación cúbico en puntos equiespaciados	*(Cubic Polynomial Fit at Equally-Spaced Points)*
Polinomio de colocación $y=ax^2+bx+c$ en puntos cualesquiera	*(Cuadratic Polynomial Fit at Arbitrary Points)*
Coeficientes para un polinomio de colocación	*(Coefficients of a Polynomial Fit)*
Evaluación de un polinomio de colocación	*(Evaluation of a Polynomial Fit)*
Ecuaciones $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$	*(Solving 5th-degree Equations)*
Ecuaciones $a^x+bx^2+cx+d = 0$	*(Solving* $a^x+bx^2+cx+d = 0$*)*
Soluciones enteras para $y^2 = ax^2+bx+c$	*(Finding Integer solutions of* $y^2 = ax^2+bx+c$*)*

Resolución de ecuaciones: Método de Newton (*)	*(Solving f(x)=0: Newton's Method)*
Resolución de ecuaciones: Método iterativo	*(Solving f(x)=0: Iterative Method*
Integrales definidas: Método de Chebyshev	*(Definite Integrals: Chebyshev's Method)*
Derivación aproximada: cálculo de y'(x)	*(Approximate Derivatives: y'(x))*
Integrales definidas: Método de Gauss-Legendre	*(Definite Integrals: Gauss-Legendre's Method)*
Integrales definidas: Método de Gauss-Chebyshev	*(Definite Integrals: Gauss-Chebyshev's Method)*
Ecuaciones diferenciales: Método de Euler (*)	*(Differential Equations: Euler's Method)*
Ecuaciones diferenciales: Método de Runge-Kutta (orden 3)	*(Differential Equations: Runge-Kutta 3's Method)*
Ecuaciones diferenciales: Método de R-K (orden 4) (***)	*(Differential Equations: Runge-Kutta 4's Method)*
Derivación aproximada: cálculo de y"(x)	*(Approximate Derivatives: y"(x))*
Integrales definidas: Método de Runge-Kutta	*(Definite Integrals: Runge-Kutta's Method)*
Integración de funciones empíricas: Regla de Simpson (**)	*(Numerical Integration: Simpson's Rule, Discrete Points)*
Ecuaciones diferenciales de 2º orden: y" = f(x,y)	*(Differential Equations of 2^{nd} Order: y" = f(x,y))*
Integrales definidas	*(Numerical Integration)*
Funciones hiperbólicas: Sh x, Ch x, Th x, e inversas	*(Hyperbolic Functions and Inverses)*
Integral de logaritmo	*(Logarithmic Integral)*
Integrales de seno y coseno	*(Sine and Cosine Integrals)*
Integrales de Fresnel	*(Fresnel Integrals)*
Integral elíptica incompleta de primera especie	*(Incomplete Elliptic Integral of the 1^{st} Kind)*
Integral de los errores	*(Error Integral)*
Distribución normal (*)	*(Normal Distribution)*
Distribución normal inversa (**)	*(Inverse Normal Integral)*
Factoriales exactos (*)	*(Factorial)*
Combinaciones mCn *(*, last example is mine*)	*(Combination)*
Permutaciones mPn (*, *3 last examples are mine*)	*(Permutation)*
Ajuste por mínimos cuadrados *(**, lin/exp/log/pow fit in one prog)*	*(Linear/Log/Exp/Pow Regression)*

Notes: * = written by *HP*, the examples are mine.

** = based on *HP* program but optimized by me and the examples are mine.

*** = written by *Fernando del Rey.*

I hope you'll enjoy them !

Valentin Albillo, 23-09-2021

Aritmética compleja: +, −, ×, ÷, $\sqrt[n]{}$

1	CHS	24	g→P
2	x⇄y	25	RCL 0
3	CHS	26	×
4	x⇄y	27	STO 0
5	RCL 2	28	R↓
6	+	29	+
7	x⇄y	30	RCL 0
8	RCL 1	31	g→R
9	+	32	x⇄y
10	GTO 32	33	STO 2
11	x⇄y	34	x⇄y
12	g→P	35	STO 1
13	1/x	36	GTO 00
14	x⇄y	37	g→P
15	CHS	38	RCL 3
16	x⇄y	39	y^x
17	GTO 20	40	x⇄y
18	x⇄y	41	RCL 3
19	g→P	42	×
20	STO 0	43	x⇄y
21	R↓	44	g→R
22	RCL 2	45	GTO 32
23	RCL 1		

0	m
1	a_1, x
2	a_2, y
3	empleado

Teoría

- Suma:

$$(a_1 + a_2 i) + (b_1 + b_2 i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) i$$

- resta

$$(a_1 + a_2 i) + (-b_1 - b_2 i) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) i$$

- multiplicación

$$(a_1 + a_2 i)(b_1 + b_2 i) = r_1 r_2 \cdot e^{(\theta_1 + \theta_2) i}$$

- división

$$\frac{(a_1 + a_2 i)}{(b_1 + b_2 i)} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1 - \theta_2) i}$$

- elevación

$$(x + yi)^m = r^m e^{m\theta}$$

Características

- operaciones encadenadas, con x en R1, y en R2
- cuatro registros libres.
- para elevación, el nº se introduce en forma inversa y↑ x

Utilización

- almacenar el 1er número — a_1 STO 1, a_2 STO 2
- introducir el segundo. — b_1 ↑ b_2
  - para suma GTO 05 R/S
  - para resta R/S
  - para multiplicación GTO 18 R/S
  - para división GTO 11 R/S

  → x, R↓ → yi

- introducir sucesivos nºs para operar en cadena
- para elevación, (supuesto $x + yi$ como resultado anterior)

m STO 3, R↓, GTO 37, R/S → $x + yi$

Ejemplos

1 - Hallar $\sqrt{\dfrac{(3+4i)+(7,4-5,6i)}{(7-2i)} \cdot (3,1+4,6i)}$

- 3 STO 1, 4 STO 2, $\left\{\begin{array}{l} 7.4 \uparrow \\ -5.6 \end{array}\right.$ GTO 05 $\boxed{R/S}$ → 10,40 (suma = 10,40 + (-1,60) i)

$\left\{\begin{array}{l} 7 \uparrow \\ -2 \end{array}\right.$ GTO 11 $\boxed{R/S}$ → 1.43 (división = 1,43 + 0,18 i)

$\left\{\begin{array}{l} 3.1 \uparrow \\ 4.6 \end{array}\right.$ GTO 18 $\boxed{R/S}$ → 3.61 (multiplicación = 3.61 + 7,16 i)

$\left\{\begin{array}{l} .5 \quad \text{STO 3} \\ R\downarrow \quad \text{GTO 37} \end{array}\right.$ $\boxed{R/S}$ → 2.41 $\boxed{x \lessgtr y}$ 1.48

resultado final, $\underline{\underline{2.41 + 1.48 i}}$

2 - Hallar $\sqrt[3]{\dfrac{(1+i)(1+2i)(1+3i)-10i}{(3+i)(2+i)}} + i + 7-3i$

- 1 STO 1, STO 2, $\left\{\begin{array}{l} 1 \uparrow \\ 2 \end{array}\right.$ GTO 18 $\boxed{R/S}$ → -1 (1ª multiplicación = -1 + 3i)

$\left\{\begin{array}{l} 1 \uparrow \\ 3 \end{array}\right.$ GTO 18 $\boxed{R/S}$ → -10 (2ª multiplicación = -10 + 0i)

$\left\{\begin{array}{l} 0 \uparrow \\ 10 \end{array}\right.$ $\boxed{R/S}$ → -10 (resta = -10 - 10i)

$\left\{\begin{array}{l} 3 \uparrow \\ 1 \end{array}\right.$ GTO 11 $\boxed{R/S}$ → -4 (1ª división = -4 - 2i)

$\left\{\begin{array}{l} 2 \uparrow \\ 1 \end{array}\right.$ GTO 11 $\boxed{R/S}$ → -2 (2ª división = -2 + 0 i)

$\left\{\begin{array}{l} 0 \uparrow \\ 1 \end{array}\right.$ GTO 05 $\boxed{R/S}$ → -2 (suma = -2 + i)

{ 3, 1/x, STO 3, R↓, GTO 37 $\boxed{R/S}$ → 0,82 (raíz cúbica = 0,82 + 1,02 i)

$\left\{\begin{array}{l} 7 \uparrow \\ -3 \end{array}\right.$ GTO 05 $\boxed{R/S}$ → 7.82 $\boxed{x \lessgtr y}$ -1.98

resultado final = $\underline{\underline{7.82 - 1.98 i}}$

Trigonometría compleja: sen(a+bi), cos(a+bi)

1	x⇄y	21	GTO 38
2	STO 1	22	×
3	RCL 4	23	COS
4	x<0	24	RCL 2
5	GTO 35	25	↑
6	×	26	1/x
7	SIN	27	−
8	x⇄y	28	2
9	e^x	29	÷
10	STO 2	30	×
11	↑	31	RCL 4
12	1/x	32	×
13	+	33	RCL 3
14	2	34	GTO 00
15	÷	35	×
16	×	36	COS
17	STO 3	37	GTO 08
18	RCL 1	38	R↓
19	RCL 4	39	SIN
20	x<0	40	GTO 24

1	a
2	e^b
3	x
4	señal

Teoría

$\text{sen}(a+bi) = \text{sen}\,a\,\text{Ch}\,b + i\cos a\,\text{Sh}\,b = x+yi$

$\cos(a+bi) = \cos a\,\text{Ch}\,b - i\,\text{sen}\,a\,\text{Sh}\,b = x+yi$

Características

- 4 registros libres
- calcula seno o coseno mediante señal en R_4

Utilización

- previamente, RAD
- para sen(a+bi), 1 STO 4

$\left\{\begin{matrix} a\uparrow \\ b \end{matrix}\right.$ $\boxed{R/S} \rightarrow x$ $\boxed{x⇄y} \rightarrow y = x+yi$

- para cos(a+bi), −1 STO 4

$\left\{\begin{matrix} a\uparrow \\ b \end{matrix}\right.$ $\boxed{R/S} \rightarrow x$ $\boxed{x⇄y} \rightarrow y = x+yi$

la señal en R_4 permanece inalterada.

Ejemplos

sen 1 = 0,84	cos 1 = 0,54
sen i = 1,18 i	cos i = 1,54
sen (1+i) = 1,30 + 0,63 i	cos (1+i) = 0,83 − 0,99 i
sen (π+πi) = −11,55 i	cos (π+πi) = −11,59
sen (π + 1,445 i) = −2,00 i	cos (π + 1,445 i) = −2,24
sen (e+πi) = 4,76 − 10,53 i	cos (e+πi) = −10,57 − 4,74 i
sen (π+ei) = −7,54 i	cos (π+ei) = −7,61
sen (π/2 + i) = 1,54	cos (π/2 + i) = −1,18 i
sen (π/2 + 5i) = 74,21	cos (π/2 + 5i) = −74,20 i
sen (π/2 − 5i) = 74,21	cos (π/2 − 5i) = 74,20 i

Evaluación de expresiones complejas

1	$x \rightleftarrows y$	10	R/S
2	$g \to P$	11	$\times$
3	RCL 0	12	$x \rightleftarrows y$
4	y^x	13	LAST X
5	$x \rightleftarrows y$	14	$\times$
6	RCL 0	15	$x \rightleftarrows y$
7	$\times$	16	$\Sigma +$
8	$x \rightleftarrows y$	17	GTO 00
9	g R		

3	m
4	y
5	usado
6	usado
7	x

Teoría

$(a+bi)^m = r^m{}_{m\varphi}$

Características

- permite calcular expresiones complejas del tipo

$x + yi = \Sigma A(a+bi)^m$ donde A es un coeficiente real

- R_1 y R_2 libres
- presenta el nº de sumandos después de cada sumatoria

Utilización

previamente PRGM y REG

- almacenar la potencia, m STO 0
- introducir a_1 y b_1 por este orden y R/S
- introducir A_1 y R/S
- proceder igual para los sucesivos sumandos
- recuperar x = RCL 7, y = RCL 4

Ejemplos

1 – Hallar $\sqrt[3]{\sqrt{21-20i} + 2(1+2i)^2}$

- 2 1/x STO 0 , 21 ↑ −20 $\boxed{R/S}$ → 5 ($\sqrt{21-20i} = 5-2i$)

coeficiente: 1 $\boxed{R/S}$ → 1 (1er sumando)

- 2 STO 0 1 ↑ 2 $\boxed{R/S}$ → −3 ($(1+2i)^2 = -3+4i$)

coeficiente 2 $\boxed{R/S}$ → 2 (2º sumando)

RCL 7 → −1
RCL 4 → +6 ($\Sigma = -1+6i$)

- 3 1/x STO 0 , R↓ $\boxed{R/S}$ → 1,53 $\boxed{x \rightleftarrows y}$ → 1,00

resultado final = 1,53 + 1,00 i

Evaluación de polinomios complejos

1	x⇄y	15	R↓
2	STO 5	16	+
3	R↓	17	RCL 7
4	STO 6	18	g→R
5	RCL 4	19	RCL 5
6	RCL 3	20	+
7	g→P	21	STO 3
8	RCL 2	22	x⇄y
9	RCL 1	23	RCL 6
10	g→P	24	+
11	x⇄y	25	STO 4
12	R↓	26	x⇄y
13	×	27	GTO 00
14	STO 7		

1	c
2	d
3	a_1
4	b_1
5	usado
6	usado
7	usado

Teoría

Dado un polinomio:

$$f(z) = (a_1 + b_1 i)\,z^n + \cdots + (a_n + b_n i)\,z + (a_{n+1} + b_{n+1} i)$$

el programa halla $f(z_0)$ donde $z_0 = c + di$

y la solución es $f(z_0) = x + yi$

Características

- sólo R_0 libre
- si un coeficiente es cero, se introduce

Utilización

- almacenar z_0, c STO 1
  d STO 2
- almacenar $a_1 + b_1 i$, a_1 STO 3
  b_1 STO 4
- entrar coeficientes, a_k ↑
  b_k $\boxed{R/S}$ ⟶ x $\boxed{x⇄y}$ ⟶ y = x+yi

Ejemplo

1 - Hallar $f(z) = (3+4i)\,z^4 + 18z^3 + (-2+i)\,z^2 - 10z + (5-7i)$

para $z = 2+i$

2 STO 1 , 3 STO 3 , 18 ↑
1 STO 2 , 4 STO 4 , 0 $\boxed{R/S}$

-2 ↑
1 $\boxed{R/S}$

-10 ↑
0 $\boxed{R/S}$

5 ↑
-7 $\boxed{R/S}$ ⟶ -106 $\boxed{x⇄y}$ 220

el resultado es $f(2+i) = -106 + 220i$

Trigonometría compleja = arcsen (a+bi), arccos (a+bi)

1	STO 2	25	RCL 4
2	x⇄y	26	×
3	1	27	x=0
4	−	28	GTO 45
5	g P	29	↑
6	STO 3	30	ABS
7	g R	31	÷
8	2	32	×
9	+	33	x⇄y
10	g→P	34	RCL 3
11	RCL 3	35	−
12	+	36	RCL 4
13	2	37	x<0
14	÷	38	GTO 42
15	↑	39	×
16	↑	40	SIN⁻¹
17	↑	41	GTO 00
18	×	42	R↓
19	1	43	COS⁻¹
20	−	44	GTO 00
21	√	45	R↓
22	+	46	1
23	LN	47	GTO 32
24	RCL 2		

2	b
3	$\sqrt{(a-1)^2+b^2}$
4	señal

Teoría

$$\arcsen(a+bi) = \arcsen \beta + i\,\mathrm{sign}(b)\cdot \mathrm{Ln}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}\right) = x + yi$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a+1)^2+b^2} + \sqrt{(a-1)^2+b^2}\right]$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(a+1)^2+b^2} - \sqrt{(a-1)^2+b^2}\right]$$

$$\mathrm{sign}(b) = \frac{b}{|b|} = \begin{cases} 1 & \text{si } b \geq 0 \\ -1 & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

e igualmente para arccos (a+bi)

Características

- calcula arcsen ó arccos mediante una señal en R_4
- 5 registros libres

Utilización, previamente RAD

- para arcsen (a+bi), 1 STO 4

a ↑
b [R/S] ⟶ x [x⇄y] ⟶ y = x + yi

- para arccos (a+bi), −1 STO 4

a ↑
b [R/S] ⟶ x [x⇄y] ⟶ y = x + yi

la señal no se altera

Ejemplos

arcsen 0,84 = 1,00	arccos 0,54 = 1,00
arcsen 1,18 i = 1,00 i	arccos 1,54 = 1,00 i
arcsen (1,30 + 0,63i) = 1,00 + 1,00 i	arccos (0,83 − 0,99i) = 1,00 + 1,00 i
arcsen 74,21 = 1,57 + 5,00 i	arccos (−10,57 − 4,74i) = 2,72 + 3,14i

Logaritmo y exponencial compleja: $\log_{(a+bi)}(c+di)$, $(a+bi)^{(c+di)}$

1	x⇌y	23	RCL 2
2	g→P	24	RCL 1
3	LN	25	g→P
4	g→P	26	LN
5	RCL 2	27	STO 5
6	RCL 1	28	RCL 3
7	g→P	29	×
8	LN	30	x⇌y
9	g→P	31	STO× 3
10	x⇌y	32	RCL 4
11	R↓	33	×
12	÷	34	−
13	STO 3	35	e^x
14	R↓	36	RCL 3
15	−	37	RCL 4
16	CHS	38	RCL 5
17	RCL 3	39	×
18	g→R	40	+
19	GTO 00	41	x⇌y
20	STO 4	42	g→R
21	x⇌y	43	GTO 00
22	STO 3		

1	a
2	b
3	r_3/r_4
4	d
5	Lr

Teoría

- logaritmo complejo,

$$\log_{(a+bi)}(c+di) = \frac{Ln(c+di)}{Ln(a+bi)} = \frac{Ln\, r_2 + \theta_2 i}{Ln\, r_1 + \theta_1 i} = \frac{r_3}{r_4}\, e^{i(\theta_3-\theta_4)} = x+yi$$

- exponencial compleja

$$(a+bi)^{(c+di)} = e^{(c+di)\,Ln(a+bi)} = \frac{r^c}{e^{d\varphi}} \cdot e^{i(c\varphi + d\,Lr)} = x+yi$$

Características

- para el logaritmo se supone $a+bi \neq 0$, $a+bi \neq 1$
- para la exponencial, $(a+bi) \neq 0$
- 3 registros libres
- $a+bi$ queda almacenado en R_1, R_2.

Utilización, previamente RAD

- para logaritmo

a STO 1 , c ↑

b STO 2 , d $\boxed{R/S}$ → x $\boxed{x⇌y}$ → y = x + yi

- para exponencial GTO 20

a STO 1 , c ↑

b STO 2 , d $\boxed{R/S}$ → x $\boxed{x⇌y}$ → y = x + yi

Ejemplos

$\log_{10}(1+2i) = 0{,}35 + 0{,}48\,i$, $10^{0{,}35+0{,}48\,i} = 1{,}00 + 2{,}00\,i$

$\log_{(1+i)}(1+3i) = 1{,}87 - 0{,}64\,i$, $(1-i)^{7+i} = 10{,}54 + 22{,}46\,i$

$\log_{(1+i)} 2i = 2$, $(1+i)^2 = 2i$

Evaluación polinómica: $y = a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$

1	↑	16	+
2	↑	17	×
3	↑	18	RCL 6
4	RCL 1	19	+
5	×	20	×
6	RCL 2	21	RCL 7
7	+	22	+
8	×	23	x⇄y
9	RCL 3	24	PAUSE
10	+	25	x⇄y
11	×	26	R/S
12	RCL 4	27	CLX
13	+	28	RCL 0
14	×	29	+
15	RCL 5	30	GTO 0 1

0	Δ
1	a_1
2	a_2
3	a_3
4	a_4
5	a_5
6	a_6
7	a_7

Teoría

- el polinomio se evalúa en la forma

$$y = (((((a_1x + a_2)x + a_3)x + a_4)x + a_5)x + a_6)x + a_7$$

para sucesivos x, x, x_1, x_2 --- separadas Δ

es decir, se halla $y(x), y(x+\Delta), \ldots\ y(x+m\Delta)$

Características

- todos los registros ocupados
- evalúa puntos sucesivos
- útil para buscar raíces
- presenta brevemente la x correspondiente.

Utilización

- almacenar coeficientes, incluso si son iguales a cero

  a_1 STO 1

  a_2 STO 2

  ---

  am STO m

- almacenar el incremento

  Δ STO 0 , PRGM

- calcular valores

$$\left.\begin{array}{l} x\ \boxed{R/S} \rightarrow (x) \rightarrow y(x) \\ \boxed{R/S} \rightarrow (x+\Delta) \rightarrow y(x+\Delta) \\ --- \\ \boxed{R/S} \rightarrow (x+m\Delta) \rightarrow y(x+m\Delta) \end{array}\right\}$$ cuídese de no perturbar la escala

- si se desea continuidad

  26 (R/S) → PAUSE

- si no se desean espaciados

  23 (x⇄y) → GTO 00

Ejemplos

1 ≡ Evaluar $y = -0.018339x^6 + 0.085569x^5 - 0.193761x^4 + 0.317650x^3 - 0.497875x^2 + 0.999902x$

para $x = 0, 0.1, \dots 1$

- almacenamos coeficientes, incluyendo 0 STO 7

a_m STO m

- almacenamos Δ

0.1 STO 0 , PRGM

- calculamos valores, resulta.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.00000	0.09531	0.18232	0.26236	0.33647	0.40547	0.47001	0.53063	0.58779	0.64185	0.69315

este era el polinomio de mini-max a $y = \ln(1+x) \Rightarrow$ da 5 cifras exactas en $0 \le x \le 1$

2 ≡ Localizar las raíces de $36x^6 + 36x^5 + 23x^4 - 13x^3 - 12x^2 + x + 1 = 0$

- almacenamos coeficientes
- almacenamos $\Delta = 1/2$ STO 0 , PRGM
- exploramos la zona $-3 < x < 3$, resulta

−3	−2.5	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
19600	6298,5	1575	269,5	24	0	1	0	72	731,5	3675	12928,5

esto nos revela dos raíces, $x = \pm 0.5$

- exploramos la zona $-0.6 < x < 0.6$, con $\Delta = 0.1$, y da ($\Delta = 0.1$ STO 0), PRGM

−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.75	0	−0.12	0.10	0.45	0.79	1	0.97	0.67	0.17	−0.25	0

que nos revela todas las raíces $\Rightarrow$ $x_{1,2} = \pm 0.5$

$-0.4 < x_3 < -0.3$

$0.3 < x_4 < 0.4$

las cuatro raíces reales de la ecuación

- con más finura, se obtiene

$x_3 = -\frac{1}{3}$

$x_4 = \frac{1}{3}$

- luego, las cuatro raíces son $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \pm\frac{1}{3}$

Polinomio de colocación cúbico en puntos igualmente espaciados

1	RCL 2	26	RCL 3
2	STO − 3	27	−
3	RCL 1	28	2
4	STO − 2	29	÷
5	RCL 0	30	+
6	STO − 1	31	×
7	RCL 2	32	RCL 3
8	STO − 3	33	2
9	RCL 1	34	×
10	STO − 2	35	3
11	RCL 2	36	÷
12	STO − 3	37	RCL 2
13	R/S	38	−
14	RCL 4	39	RCL 1
15	−	40	+
16	RCL 5	41	RCL 1
17	÷	42	+
18	↑	43	2
19	↑	44	÷
20	↑	45	+
21	RCL 3	46	×
22	×	47	RCL 0
23	6	48	+
24	÷	49	GTO 13
25	RCL 2		

0	y_0 , a
1	y_1 , b
2	y_2 , c
3	y_3 , d
4	α
5	β

Teoría

- dadas cuatro abcisas x_0, x_1, x_2, x_3 y sus ordenadas y_0, y_1, y_2, y_3 el programa calcula el polinomio $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ que pasa por los cuatro puntos, a condición de que estén igualmente espaciados

- Para ello se emplea la fórmula de Newton

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 \\ \hline y_0 & & y_1 & & y_2 & & y_3 \\ & \Delta_1 & & \Delta_2 & & \Delta_3 & \\ & & \Delta'_1 & & \Delta'_2 & & \\ & & & \Delta''_1 & & & \end{array}$$

, las Δ son diferencias

- llamamos $y_0 = a$, $\Delta_1 = b$, $\Delta'_1 = c$, $\Delta''_1 = d$

, y el polinomio será

$$y = a + bm + \frac{cm(m-1)}{2} + \frac{dm(m-1)(m-2)}{6}$$

donde si $x_0 = \alpha$, $x_1 = \alpha+\beta$, $x_2 = \alpha+2\beta$, $x_3 = \alpha+3\beta$

tendremos

$$m = \frac{x-\alpha}{\beta}$$

, que dará y en función de x

Características

- calcula el valor de $y(x)$ dando x
- R_6, R_7 libres.

Utilización

- almacenar y_0, y_1, y_2, y_3

y_0 STO 0
y_1 STO 1
y_2 STO 2
y_3 STO 3

almacenar α, β ⇒ α STO 4
β STO 5

$\alpha = x_0$
$\beta = x_1 - x_0$

$\boxed{R/S} \rightarrow c$

- recuperar (si se desea) a, b, c, d.

RCL 0 → a
RCL 1 → b

RCL 2 → c
RCL 3 → d

- calcular $y(x)$ para un x dado

x $\boxed{R/S} \longrightarrow y(x)$,

para otro x , x $\boxed{R/S} \rightarrow y(x)$, etc.

Ejemplo

1 ≡ Hallar un polinomio que tome los valores (3, 5) (5, 13) (7, −1), (9, 0)

– introducimos y almacenamos constantes, f PRGM

$$\left\{\begin{array}{l} 5 \text{ STO } 0 \\ 13 \text{ STO } 1 \\ -1 \text{ STO } 2 \\ 0 \text{ STO } 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha = x_0 = 3 \text{ STO } 4 \\ \beta = x_1 - x_0 = 2 \text{ STO } 5 \end{array} \qquad \boxed{R/S} \to -22$$

– recuperamos a, b, c, d

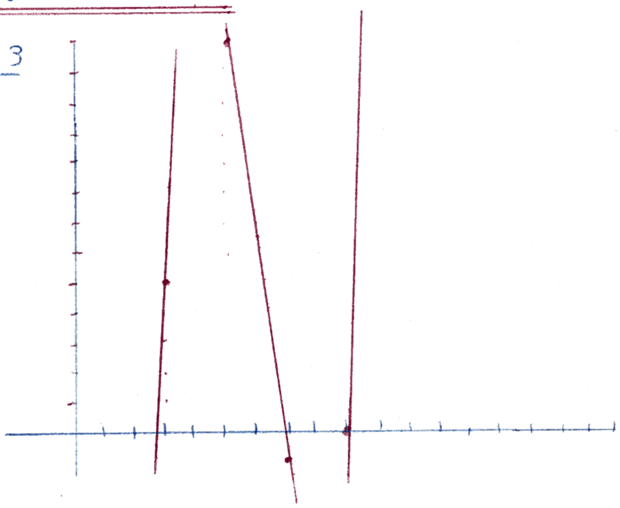
RCL 0 → a = 5 RCL 2 → c = −22

RCL 1 → b = 8 RCL 3 → d = 37

podemos anticipar que el polinomio es

$$y = 5 + 8m - 11\,m(m-1) + \frac{37}{6}(m-1)\,m\,(m-2)$$

donde $m = \dfrac{x-3}{2}$



– calculamos valores de $y(x)$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 5, \ \boxed{R/S} \longrightarrow y(x) = 13 \\ x = \pi, \ \boxed{R/S} \longrightarrow y(x) = 7{,}07 \\ x = 4, \ \boxed{R/S} \longrightarrow y(4) = 14{,}06 \end{array}\right.$$

2 ≡ Hallar valores del polinomio que pasa por (2, 0.6931), (3, 1.0986), (4, 1.3863), (5, 1.6094)

– introduciendo constantes, f PRGM

$$\left\{\begin{array}{l} 0.6931 \text{ STO } 0 \\ 1.0986 \text{ STO } 1 \\ 1.3863 \text{ STO } 2 \\ 1.6094 \text{ STO } 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha = x_0 = 2 \\ \beta = x_1 - x_0 = 1 \end{array} \qquad \boxed{R/S} \longrightarrow c = -0{,}1178$$

recuperando a, b, c, d ⇒ a = 0,6931 c = −0,1178

b = 0,4055 d = 0,0532

– hallamos valores de $y(x)$, que puede considerarse aproximación a $y = \ln x$

$$\left\{\begin{array}{llll} x = 3{,}5 & \boxed{R/S} \to y = 1{,}2538 & (L\,3{,}5 = 1.2528) \\ x = 2{,}5 & \boxed{R/S} \to y = 0.9139 & (L\,2{,}5 = 0.9163) \\ x = 4.3 & \boxed{R/S} \to y = 1.4576 & (L\,4{,}3 = 1.4586) \\ x = e & \boxed{R/S} \to y = 0{,}9986 & (L\,e = 1.0000) \end{array}\right.$$

≡ se ve que $y(x)$ da aproximación de 3 cifras a Lx en 3, $2 \leq x \leq 5$

Polinomio de colocación $y = ax^2 + bx + c$ en puntos cualesquiera

1	STO 4	26	STO − 6
2	R↓	27	RCL 5
3	STO 3	28	RCL 1
4	R↓	29	−
5	STO 2	30	STO ÷ 6
6	STO 7	31	RCL 2
7	R↓	32	RCL 1
8	STO 1	33	×
9	R/S	34	STO − 7
10	STO 6	35	RCL 6
11	R↓	36	RCL 1
12	STO 5	37	RCL 3
13	RCL 4	38	×
14	STO − 2	39	×
15	RCL 1	40	STO + 7
16	RCL 3	41	RCL 1
17	−	42	RCL 3
18	STO ÷ 2	43	+
19	RCL 4	44	RCL 6
20	STO − 6	45	×
21	RCL 5	46	STO − 2
22	RCL 3	47	RCL 7
23	−	48	RCL 2
24	STO ÷ 6	49	RCL 6
25	RCL 2		

1	x_0
2	y_0 , b
3	x_1
4	y_1
5	x_2
6	y_2 , a
7	c

Teoría

- dados 3 puntos cualesquiera (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) existe un único polinomio $y = ax^2 + bx + c$, tal que

$$y(x_0) = y_0$$
$$y(x_1) = y_1$$
$$y(x_2) = y_2$$

- se calcula así

$$\alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\beta = \frac{\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

y el polinomio es

$$y = y_0 + (x - x_0)\alpha + (x - x_0)(x - x_1)\beta$$

que se reduce a la forma $y = ax^2 + bx + c$

Características

- R_0 libre
- gran rapidez.
- a, b, c, almacenados en R_6, R_2, R_7

Utilización

- introducir los 2 primeros puntos (en cualquier orden)

x_0 ↑
y_0 ↑
x_1 ↑
y_1 $\boxed{R/S}$,

- introducir el tercer punto

x_2 ↑
y_2 $\boxed{R/S}$ ⟶ a $\boxed{R↓}$ ⟶ b $\boxed{R↓}$ ⟶ c

Ejemplos

- 1 ≡ Hallar el polinomio que se coloca en (0,3 , 0,2955), (0,7 , 0,6442), (1, 0,8415)

  - introducimos los dos primeros

    0,3 ↑
    0,2955 ↑
    0,7 ↑
    0,6442
    $\boxed{R/S}$

  - introducimos el 3er punto

    1 ↑

    0,8415 $\boxed{R/S}$ → a = −0,3058 $\boxed{R\downarrow}$ → b = 1,1776 , $\boxed{R\downarrow}$ → c = −0,0302

  - Luego el polinomio es $y = -0{,}3058x^2 + 1{,}1776x - 0{,}0302$

    que se puede considerar aproximación de 2 cifras a $y = \operatorname{sen} x$ en $0 \leq x \leq 1$

  = para hallar $y(0.3333)$

    x= 0,3333 $\boxed{x^2}$ $\boxed{RCL\ 6}$ $\boxed{\times}$ 0,3333 $\boxed{RCL\ 2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{+}$ $\boxed{RCL\ 7}$ $\boxed{+}$ ⟶ 0.3283 ($\operatorname{sen} x = 0{,}327$)

- 2 ≡ Hallar el polinomio que se coloca en (0,1873 , 1,2060), (0,4321 , 1,5405) y (0,9526 , 2,5924). Hallar valores.

  - introducimos los primeros.

    0,1873 ↑
    1,2060 ↑
    0,4321 ↑
    1,5405
    $\boxed{R/S}$

  - introducimos el último

    0,9526 ↑

    2,5924 $\boxed{R/S}$ ⟶ resulta $y = 0{,}8552x^2 + 0{,}8367x + 1{,}0193$

    que se puede considerar aproximación de 2 decimales a $y = e^x$ en $0 \leq x \leq 1$

hallando valores,

$y(0) = 1{,}02$ ($e^0 = 1{,}00$) , $y(0.4273) = 1{,}533$, ($e^x = 1{,}533$)

$y(0.5) = 1{,}65$ ($e^{\frac{1}{2}} = 1{,}65$) , $y(0.732) = 2{,}09$ ($e^x = 2{,}08$)

$y(1) = 2{,}71$ ($e^1 = 2{,}72$) , $y(\frac{1}{\pi}) = 1{,}372$ ($e^x = 1{,}375$)

Coeficientes para un polinomio de colocación

1	RCL 5	23	RCL 5
2	STO − 6	24	STO − 6
3	RCL 4	25	RCL 4
4	STO − 5	26	STO − 5
5	RCL 3	27	RCL 3
6	STO − 4	28	STO − 4
7	RCL 2	29	RCL 2
8	STO − 3	30	STO − 3
9	RCL 1	31	RCL 5
10	STO − 2	32	STO − 6
11	RCL 0	33	RCL 4
12	STO − 1	34	STO − 5
13	RCL 5	35	RCL 3
14	STO − 6	36	STO − 4
15	RCL 4	37	RCL 5
16	STO − 5	38	STO − 6
17	RCL 3	39	RCL 4
18	STO − 4	40	STO − 5
19	RCL 2	41	RCL 5
20	STO − 3	42	STO − 6
21	RCL 1	43	GTO 00
22	STO − 2		

0	x_0 , a
1	x_1 , b
2	x_2 , c
3	x_3 , d
4	x_4 , e
5	x_5 , f
6	x_6 , g

Teoría

- suponemos hasta 7 argumentos $x = 0, 1, \ldots 6$, en los cuales un polinomio $P(x)$ toma los valores $y_0 \ldots y_6$.

- Queremos dados los $y_0 \ldots y_6$, hallar el polinomio.

Utilizando la fórmula de Newton

$$\begin{array}{llllllll}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
a = & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\
b = & \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \Delta_5 & \Delta_6 & \\
c = & \Delta'_1 & \Delta'_2 & \Delta'_3 & \Delta'_4 & \Delta'_5 & & \\
d = & \Delta''_1 & \Delta''_2 & \Delta''_3 & \Delta''_4 & & & \\
e = & \Delta'''_1 & \Delta'''_2 & \Delta'''_3 & & & & \\
f = & \Delta^{IV}_1 & \Delta^{IV}_2 & & & & & \\
g = & \Delta^{V}_1 & & & & & &
\end{array}$$

las Δ son diferencias

el polinomio es

$$y = a + bm + c\frac{m(m-1)}{2} + d\frac{m(m-1)(m-2)}{6} + e\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24} +$$

$$+ f\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{120} + g\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{720}$$

Características

- para polinomios de grado $n \leq 6$
- R_7 libre, gran rapidez
- a, b ... g, quedan almacenados.

Utilización

- para polinomio de grado $n \leq 6$
- introducir $y_0, \ldots y_m$

$$\left.\begin{array}{l} y_0 \ \boxed{STO\ 0} \\ \ldots \\ y_m \ \boxed{STO\ m} \end{array}\right\} \quad \boxed{R/S}$$

- recuperar los $m+1$ coeficientes

$\boxed{RCL\ 0} \rightarrow$ a

$\boxed{RCL\ m} \rightarrow$ último coeficiente

Ejemplos

- 1 ≡ Hallar el polinomio que para $x = 0, \dots 6$ adopta los valores 0, 1, 128, 2187, 16384, 78125, 279936

  - introducimos $y_0 \dots y_6$

0	STO 0	16384	STO 4	R/S
1	STO 1	78125	STO 5	
128	STO 2	279936	STO 6	
2187	STO 3			

  - recuperamos coeficientes

RCL 0 = a = 0	RCL 3 = d = 1806	RCL 6 = g = 15120
RCL 1 = b = 1	RCL 4 = e = 8400	
RCL 2 = c = 126	RCL 5 = f = 16800	

- luego el polinomio es

$$y = m + \frac{126\, m(m-1)}{2} + \frac{1806\, m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{8400\, m(m-1)(m-2)(m-3)}{24} + \frac{16800\, m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{120} +$$

$$+ \frac{15120\, m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{720}$$

que se reduce a $y = x^7 - x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$

- 2 ≡ Hallar el polinomio que toma para $x = 0, 1, \dots 3$, los valores $-6, 0, 0, 0$

  - introducimos $-6, 0, 0, 0$

−6	STO 0	R/S
0	STO 1	
0	STO 2	
0	STO 3	

  - recuperamos coeficientes

RCL 0 = a = −6	RCL 2 = c = −6
RCL 1 = b = 6	RCL 3 = d = 6

- luego el polinomio es $y = -6 + 6m - 3m(m-1) + m(m-1)(m-2)$

que se reduce a $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Evaluación de un polinomio de colocación

1	STO 7	23	×
2	RCL 1	24	+
3	RCL 7	25	x⇄y
4	RCL 2	26	3
5	×	27	−
6	+	28	STO × 7
7	x⇄y	29	R↓
8	1	30	RCL 5
9	−	31	RCL 7
10	STO × 7	32	×
11	R↓	33	+
12	RCL 3	34	x⇄y
13	RCL 7	35	4
14	×	36	−
15	+	37	STO × 7
16	x⇄y	38	R↓
17	2	39	RCL 6
18	−	40	RCL 7
19	STO × 7	41	×
20	R↓	42	+
21	RCL 4	43	GTO 00
22	RCL 7		

1	a_1
2	a_2
3	a_3
4	a_4
5	a_5
6	a_6
7	$x, x(x-1)$, etc

Teoría

- el programa evalua un polinomio hasta de 5° grado, dado en la forma

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 x(x-1) + a_4 x(x-1)(x-2) + a_5 x(x-1)(x-2)(x-3) + a_6 x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

para diferentes x dados.

Características

- para polinomios de grado $n \leq 5$
- R_0 libre
- rapidez, las constantes permanecen almacenadas

Utilización

- almacenar parámetros, previamente f REG

a_1 STO 1 $\quad a_n$ STO n
a_2 STO 2
a_3 STO 3

- introducir x

x $\boxed{R/S}$ ⟶ $y(x)$, e igual para otro x

Nota

- es particularmente adecuado para evaluar los polinomios de colocación que se obtienen en el apartado anterior, es decir, para argumentos igualmente espaciados

Ejemplos

1 ≡ Evaluar para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, el polinomio que se da:

$$y = 1 + \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{17}{6}x(x-1)(x-2) + \frac{169}{24}x(x-1)(x-2)(x-3) + \frac{2079}{120}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

- introducimos coeficientes, f REG 6

1 STO 1 | 17/6 STO 4
3/2 STO 3 | 169/24 STO 5
2079/120 STO 6

- introducimos los argumentos

$x = 1$ $\boxed{R/S}$ → $y = 1$
$x = 2$ $\boxed{R/S}$ → $y = 4$
$x = 3$ $\boxed{R/S}$ → $y = 27$
$x = 4$ $\boxed{R/S}$ → $y = 256$
$x = 5$ $\boxed{R/S}$ → $y = 3125$
$x = 0$ $\boxed{R/S}$ → $y = 1$

- era el polinomio de colocación en 0-- 5 para $y = x^x$

2 ≡ Evaluar para $x = 0{,}1,\ 0{,}2 \ldots 1$, el siguiente polinomio, donde $m = \dfrac{x}{0{,}2}$

$$y = 0{,}1986693307\,m - 0.0039601 5955\,m(m-1) - 0.0012674269\,m(m-1)(m-2) +$$
$$+ 0.00002578867083\,m(m-1)(m-2)(m-3) + 0.0000023207983 33\,m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$$

- introducimos coeficientes, f REG 6

0,19 -- STO 2 | 0,000025-- STO 5
-0,0039 ·· STO 3 | 0,0000023 -- STO 6
- 0,0012 -- STO 4

- introducimos argumentos, y resulta la tabla, $m = \dfrac{x}{0{,}2}$, en la tabla está $x,\ y(m)$

0	0.000 000 0	0.5	0.479 425 4	1.0	0.841 471 0
0.1	0.099 832 9	0.6	0.564 642 5	$1/\pi$	0.312 962 0
0.2	0.198 669 3	0.7	0.644 217 9	$\sqrt{2}/2$	0.649 637 2
0.3	0.295 520 4	0.8	0.717 356 1	$\sqrt{5}/3$	0.678 233 7
0.4	0.389 418 3	0.9	0.783 326 2	$e/4$	0.628 459 2

- este es el polinomio de colocación en 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8, 1 para $y = \operatorname{sen} x$. Esto asegura que en el intervalo 0,-1 este polinomio da 6 cifras decimales de exactitud garantizadas

≡ por ejemplo, $y\left(\dfrac{e^{-1}}{0{,}2}\right) \simeq 0{,}3596376$, y $\operatorname{sen} e^{-1} \simeq 0{,}3596376$

que son, con 7 cifras, iguales

Ecuaciones $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

1	STO 0	26	×
2	↑	27	RCL 1
3	↑	28	4
4	↑	29	×
5	RCL 1	30	+
6	+	31	×
7	×	32	RCL 2
8	RCL 2	33	3
9	+	34	×
10	×	35	+
11	RCL 3	36	×
12	+	37	RCL 3
13	×	38	2
14	RCL 4	39	×
15	+	40	+
16	×	41	×
17	RCL 5	42	RCL 4
18	+	43	+
19	PAUSE	44	STO ÷ 6
20	STO 6	45	CLX
21	RCL 0	46	RCL 6
22	↑	47	−
23	↑	48	$x \neq y$
24	↑	49	GTO 01
25	5		

0	x_i
1	a
2	b
3	c
4	d
5	e
6	$f(x_i)/f'(x_i)$

Teoría

- usa el método de Newton

para resolver $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

se calcula $$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^5 + a x_i^4 + b x_i^3 + c x_i^2 + d x_i + e}{5x_i^4 + 4a x_i^3 + 3b x_i^2 + 2c x_i + d}$$

donde x_0 = un valor previamente dado

Características

- el programa sirve para ecuaciones de grado $n \leq 5$
- presenta $f(x_i)$ en cada iteración. Si no converge a cero, puede ser que la ecuación no tenga raíces, o el valor dado no sea adecuado como primera aproximación.
- R_7 queda libre
- una vez hallada la raíz, se presenta en pantalla y el programa se detiene. Esto sucede cuando $x_{i+1} = x_i$, es decir cuando dos aproximaciones consecutivas son iguales.
- si se desea el valor de $f(x)$ para la última aproximación, $\boxed{R/S}$

Utilización

- a STO 1
  b STO 2
  c STO 3 previamente
  d STO 4
  e STO 5

- x_0 (1ª aproximación) $\boxed{R/S} \longrightarrow$ (se presenta brevemente) $\rightarrow f(x_0)$

  $f(x_1)$

  $f(x_n) \longrightarrow x$

- para otra raíz, dar una aproximación a ella x'_0 y se repite el paso anterior.

Ejemplos

≡ 1º) - Resolver $x^5 - 11x^4 + 42x^3 - 65x^2 + 34x - 0.5 = 0$

-11 STO 1
42 STO 2
-65 STO 3
34 STO 4
-0.5 STO 5

, - primera raíz ,

$x_0 = 0$ $\boxed{R/S}$ → (-0.5)
→ (-0.014)
→ $(-1.19 \cdot 10^{-5})$
→ $(1 \cdot 10^{-10})$ → $x_1 = 0.0151398 1582$

- segunda raíz

$x_0 = 1$ $\boxed{R/S}$ → (0.5)
→ $(1.67 \cdot 10^{-2})$
→ $(2.49 \cdot 10^{-5})$
→ $(-4.10 \cdot 10^{-9})$ → $x_2 = 1.057558345$

- tercera raíz

$x_0 = 2$ $\boxed{R/S}$ → (-0.5)
$(1.73 \cdot 10^{-2})$
$(1.1 \cdot 10^{-5})$
$(3.09 \cdot 10^{-8})$
$(3.8 \cdot 10^{-9})$ → $x_3 = 2.080614353$

- si el programa no se detiene, pero $f(x)$ está muy cerca de cero, lo mejor es $\boxed{R/S}$ $\boxed{RCL\ 0}$ → x

- cuarta raíz

$x_0 = 3$ $\boxed{R/S}$ → $x_4 = 3.304016361$

- quinta raíz

$x_0 = 5$ $\boxed{R/S}$ → $x_5 = 4.542671123$

≡ 2º) - Resolver $x^4 - 2.0379x^3 - 15.4245x^2 + 15.6696x + 35.4936 = 0$

para hallar la raíz mayor ⇒ $x_0 = 5$ $\boxed{R/S}$ → $x_1 = 4.327505941$

para hallar la raíz menor ⇒ $x_0 = -5$ $\boxed{R/S}$ → $x_2 = -3.211994375$

para hallar la tercera ⇒ $x_0 = -1$ $\boxed{R/S}$ → $x_3 = -1.201998597$

para hallar la cuarta ⇒ $x_0 = 2$ $\boxed{R/S}$ → $x_4 = 2.124387029$

≡ 3º) - Resolver $x^3 - 7.27408 3044x^2 + 16.82684819x - 12.07700795 = 0$

-7.27-- STO 1
16,8-- STO 2
-12.07-- STO 3
0 STO 4
0 STO 5

para hallar la raíz mayor, 5 $\boxed{R/S}$ → $x_1 = 3.141592651$

para hallar la segunda raíz, 1 $\boxed{R/S}$ → $x_2 = 1.414213557$

" " " tercera " , 2.8 $\boxed{R/S}$ → $x_3 = 2.718281838$

Ecuaciones $a^x + bx^2 + cx + d = 0$

1	STO 0	25	RCL 2
2	RCL 1	26	×
3	x⇄y	27	2
4	y^x	28	×
5	RCL 0	29	+
6	x^2	30	RCL 3
7	RCL 2	31	+
8	×	32	÷
9	+	33	CHS
10	RCL 0	34	RCL 0
11	RCL 3	35	+
12	×	36	STO 5
13	+	37	RCL 0
14	RCL 4	38	−
15	+	39	ABS
16	NOP	40	EEX
17	PAUSE	41	CHS
18	RCL 1	42	8
19	RCL 0	43	f x≥y
20	y^x	44	GTO 47
21	RCL 1	45	RCL 5
22	LN	46	GTO 01
23	×	47	RCL 5
24	RCL 0	48	GTO 00

0	x_i
1	a
2	b
3	c
4	d
5	x_{i+1}

Teoría

– se emplea el método de Newton

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a^{x_i} + bx_i^2 + cx_i + d}{a^{x_i} La + 2bx_i + c}$$

Características

- R_6 y R_7 libre
- funciona para $a > 0$ exclusivamente
- puede utilizarse para hallar valores de $f(x)$ para diversos x

  para ello 16 GTO 00
- muestra brevemente $f(x_i)$ y se detiene cuando $|x_{i+1} - x_i| \leq 10^{-8}$

Utilización

a STO 1
b STO 2
c STO 3
d STO 4

, x_0 $\boxed{R/S} \longrightarrow$ x

Ejemplos

1 ≡ Resolver $2^x - 3x^2 + 2x - 7 = 0$

$x_0 = 10$ $\boxed{R/S} \longrightarrow$ $x_1 = 7{,}21772860 9$

2 ≡ Resolver $2^x - 5x - 3 = 0$

la raíz menor, $x_0 = 0$ $\boxed{R/S} \longrightarrow$ $x_1 = -0.4539964383$

la raíz mayor, $x_0 = 5$ $\boxed{R/S} \longrightarrow$ $x_2 = 4{,}738311619$

3 ≡ Resolver $\pi^x - ex^2 + \sqrt{2}\,x - Ln\,5 = 0$

la raíz menor, $x_0 = 0$ $\boxed{R/S} \longrightarrow$ $x_1 = 0{,}3146331724$

" " mayor, $x_0 = 5$ $\boxed{R/S} \longrightarrow$ $x_2 = 1.830538113$

Soluciones enteras para $y^2 = ax^2 + bx + c$

1	STO 0	13	$\sqrt{\ }$
2	x^2	14	FRAC
3	RCL 1	15	$x \neq 0$
4	$\times$	16	GTO 20
5	RCL 2	17	LASTx
6	RCL 0	18	RCL 0
7	$\times$	19	R/S
8	+	20	RCL 0
9	RCL 3	21	1
10	+	22	+
11	$x < 0$	23	GTO 01
12	GTO 00		

0	xm
1	a
2	b
3	c

Teoría

- para x, desde x_0 hasta que se detenga, calcula

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

, y si es entero, lo da como solución

Características

- va presentando sucesivamente las soluciones
- si y resulta imaginario, se para y regresa al comienzo

Utilización

- previamente

a STO 1
b STO 2
c STO 3

- se da un valor inicial

x_0 $\boxed{R/S}$ ⟶ x $\boxed{x \rightleftarrows y}$ ⟶ y , igual para otra solución $\boxed{R/S}$

- si aparece en pantalla un valor negativo, dar otro x_0 inicial

Ejemplos

1 ≡ Hallar soluciones enteras para $y^2 = 4x^2 - 56x - 575804$

probamos $x_0 = 300$ $\boxed{R/S}$ ⟶ -232604, negativo, y imaginario, no sirve

$x_0 = 400$ $\boxed{R/S}$ ⟶ $x = 401$ $\boxed{x \rightleftarrows y}$ ⟶ $y = 212$

$\boxed{R/S}$ ⟶ $x = 420$ $\boxed{x \rightleftarrows y}$ ⟶ $y = 326$

$\boxed{R/S}$ ⟶ $x = 427$ $\boxed{x \rightleftarrows y}$ ⟶ $y = 360$, etcétera,

entre $400 < x < 900$, resultan las soluciones siguientes

x	y
401	212
420	326
427	360
467	520
478	558
497	620
537	740
562	810

x	y
579	856
667	1080
777	1340
805	1404
852	1510

Resolución de ecuaciones = Método de Newton

1	CLX	31	x = 0
2	STO 0	32	GTO 49
3	RCL 1	33	RCL 0
4	GTO 17	34	x = 0
5	R↓	35	GTO 05
6	STO 4	36	R↓
7	PAUSE	37	RCL 4
8	1	38	÷
9	STO 0	39	1
10	RCL 1	40	−
11	RCL 1	41	1/X
12	EEX	42	RCL 3
13	5	43	×
14	÷	44	STO − 1
15	STO 3	45	ABS
16	+	46	RCL 2
17	f(x)	47	x<y
18	GTO 31	48	GTO 01
19		49	RCL 1

0	señal
1	x
2	ε
3	δ
4	f(x)

Teoría

– el método de Newton para resolver $f(x) = 0$, es

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

– aquí se usa una aproximación numérica a la derivada.

se toma $f'(x) \approx \dfrac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$, con $\delta = 10^{-5}$

– esto se resume en la fórmula iterativa

$$x_{i+1} = x_i - \delta x_i \left[\frac{f(x_i + \delta x_i)}{f(x_i)} - 1 \right]^{-1}$$

donde se supone definida $f(x)$, y dada una primera aproximación

Características

– se usa una señal para calcular $f(x)$ ó $f(x+\delta x)$
– 13 pasos para definir $f(x)$ con x en R_1
– R_5, R_6, R_7 libres
– se presenta brevemente $f(x)$.

Utilización

– defínase la $f(x)$, x en pantalla y R_1

GTO 16, f(x), GTO 31

– almacénese suposición inicial

x_1 STO 1

– almacénese tolerancia $\varepsilon = |x_{i+1} - x_i|$

ε STO 2

– calcule la solución $\boxed{R/S} \longrightarrow x$

Ejemplos

1 ≡ Resolver $3^x + 4^x - 6^x = 0$

- GTO 16
- pulsar $\boxed{3}\boxed{x \rightleftarrows y}\boxed{y^x}\boxed{LASTX}\boxed{4}\boxed{x \rightleftarrows y}\boxed{y^x}\boxed{LASTX}\boxed{6}\boxed{x \rightleftarrows y}\boxed{y^x}\boxed{-}\boxed{+}\boxed{GTO\ 31}$

$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 1 & STO\ 1 \\ 10^{-8} & STO\ 2 \end{array}\right\}$ $\boxed{R/S} \longrightarrow$ $x_1 = 1{,}293174076$

2 ≡ Resolver $5^x - 10\,\text{sen}\,x - 8x - 3 = 0$

- GTO 16
- pulsar $\boxed{5}\boxed{x \rightleftarrows y}\boxed{y^x}\boxed{RCL\ 1}\boxed{SIN}\boxed{RCL\ 5}\boxed{\times}\boxed{-}\boxed{RCL\ 1}\boxed{8}\boxed{\times}\boxed{-}\boxed{3}\boxed{-}$

$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 1 & STO\ 1 \\ \varepsilon = 10^{-9} & STO\ 2 \\ 10 & STO\ 5 \end{array}\right\}$, g RAD $\boxed{R/S} \longrightarrow x_1 = 2.078497887$

3 ≡ Resolver $\ln \dfrac{1+x^2}{x} - 3\,\text{arctg}\,x = 0$

- GTO 16
- pulsar $\boxed{1/x}\boxed{LASTX}\boxed{x^2}\boxed{1}\boxed{+}\boxed{\times}\boxed{\ln}\boxed{RCL\ 1}\boxed{TAN^{-1}}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{-}\boxed{GTO\ 31}$

$\varepsilon = 10^{-9}$ STO 2 $\}$
- la mayor raíz ⇒ 10 STO 1 $\boxed{R/S} \longrightarrow$ $x_1 = 108.2664194$
- la menor raíz ⇒ 0.1 STO 1 $\boxed{R/S} \longrightarrow$ $x_2 = 0.382846792$

4 ≡ Resolver $x^x - 3x^2 - 8 = 0$

- GTO 16
- pulsar $\boxed{\uparrow}\boxed{y^x}\boxed{LASTX}\boxed{x^2}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{-}\boxed{8}\boxed{-}\boxed{GTO\ 31}$

$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 4 & STO\ 1 \\ \varepsilon = 10^{-9} & STO\ 2 \end{array}\right\}$ $\boxed{R/S} \longrightarrow$ $x_1 = 3.160388255$

Resolución de ecuaciones : Método iterativo

1	STO 0	37	RCL 1
2	EEX	38	RCL 2
3	CHS	39	$x \geq y$
4	9	40	GTO 49
5	STO 2	41	R↓
6	.1	42	STO − 0
7	STO 1	43	1
8	RCL 0	44	0
9	PAUSE	45	STO ÷ 1
10	F(X)	46	RCL 1
–	GTO 35	47	STO + 0
–		48	GTO 08
35	$x<0$	49	RCL 0
36	GTO 46		

0	X
1	1, 0.1, ---
2	10^{-9}

Teoría

– es un método de iteración, que prueba sucesivos valores

la raíz aparece en sucesión : 2, 2.1, 2.17, 2.173, --

Características

– es lento, pero acaba "cazando" la raíz

– presenta en pantalla aproximaciones sucesivas, y se para al alcanzar la precisión deseada, o bien cuando $|x_{i+1} - x_i| < 10^{-9}$

– x en pantalla y R_0 para definir $f(x)$, 25 pasos

Utilización

– defínase $f(x)$, x en pantalla y R_0 GTO 09, $f(x)$, GTO 35

– dar primera aproximación

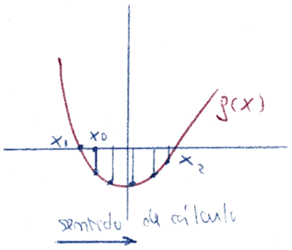
x_0 tal que $f(x_0)$ es negativo

x_0 $\boxed{R/S}$ ⟶ sucesivas aproximaciones

Advertencia

– es imprescindible que $f(x_0)$ sea negativo.

supongamos una función : del tipo

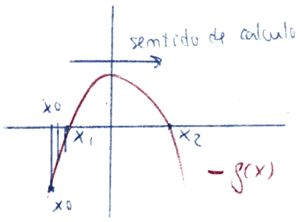


- dado x_0 tal que $f(x_0) < 0$, el cálculo progresa hacia x_2, es decir hacia la derecha

de esta forma, la segunda raíz x_1 no se podrá hallar

– es preciso cambiar el signo de la función, $f(x) \doteq -f(x)$

entonces, resultará :



dado el x_0, tal que $f(x_0) < 0$, es decir, a la izquierda de la segunda raíz, el cálculo progresará hacia esa raíz que será entonces hallable sin dificultad. x_1

procediendo así, se hallan todas las raíces

Ejemplos

1 ≡ Resolver $x^5 - 11x^4 + 42x^3 - 65x^2 + 34x - 0.5 = 0$

- GTO 09
- pulsar $\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow}\boxed{\text{RCL 3}}\boxed{+}\boxed{\times}\boxed{\text{RCL 4}}\boxed{+}\boxed{\times}\boxed{\text{RCL 5}}\boxed{+}\boxed{\times}\boxed{\text{RCL 6}}\boxed{+}\boxed{\times}\boxed{\text{RCL 7}}\boxed{+}\boxed{\text{GTO 35}}$
- almacenar constantes, −11 STO 3, 42 STO 4, −65 STO 5, 34 STO 6, −0.5 STO 7

$x_0 = 0 \ \boxed{\text{R/S}} \longrightarrow x_1 = 0.015139816$

$x_0 = 2 \ \boxed{\text{R/S}} \longrightarrow x_2 = 2.080614351$

$x_0 = 4 \ \boxed{\text{R/S}} \longrightarrow x_3 = 4.542671122$

ahora, cambiando el signo, GTO 26, CHS, GTO 35

$x_0 = 2 \ \boxed{\text{R/S}} \longrightarrow x_4 = 1.057558345$

$x_0 = 4 \ \boxed{\text{R/S}} \longrightarrow x_5 = 3.304016363$

2 ≡ Resolver $$2\cos x \cdot \sqrt{\left(\frac{x+3}{2\,\text{sen}\,x}\right)^2 - 1} - \text{Ln}\left[\frac{x+3}{2\,\text{sen}\,x} + \sqrt{\left(\frac{x+3}{2\,\text{sen}\,x}\right)^2 - 1}\right] = 0$$

- GTO 09
- pulsar $\boxed{3}\boxed{+}\boxed{\text{RCL 0}}\boxed{\text{SIN}}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{\div}\boxed{\text{STO 3}}\boxed{x^2}\boxed{1}\boxed{-}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\text{STO + 3}}\boxed{\text{RCL 0}}\boxed{\text{COS}}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL 3}}\boxed{\text{LN}}\boxed{-}\boxed{\cancel{\text{R/S}}}\boxed{\text{CHS}}\boxed{\text{GTO 35}}$
- pulsar GRAD

$x_0 = 1 \ \boxed{\text{R/S}} \longrightarrow x = 1.202872754$

3 ≡ Resolver $\text{tg}\,x = x$

- GTO 09
- pulsar $\boxed{\text{TAN}}\boxed{\text{LAST X}}\boxed{-}\boxed{\text{CHS}}\boxed{\text{GTO 35}}$

$x_0 = 4.5 \ \boxed{\text{R/S}} \longrightarrow x_1 = 4.712388981$ (4.493409459)
(7.725251838)
(10.90412166)

4 ≡ Resolver $x^x = \pi$

- GTO 09
- pulsar $\boxed{\uparrow}\boxed{y^x}\boxed{\pi}\boxed{-}\boxed{\text{GTO 35}}$

$x_0 = 1 \ \boxed{\text{R/S}} \longrightarrow x = 1.854105968$

Integrales definidas : Método de Chebyshev

1	CLX	35	STO + 6
2	STO 6	36	RCL 5
3	STO 0	37	x = 0
4	1	38	GTO 45
5	STO + 0	39	x < 0
6	RCL 0	40	GTO 04
7	5	41	CHS
8	x = y	42	GTO 12
9	GTO 43	43	CLX
10	x⇄y	44	GTO 12
11	R/S	45	RCL 6
12	STO 5	46	2
13	f(x)	47	×
	GTO 35	48	9
		49	÷

0	1,2,… 5
1	x_1'
2	x_2'
3	x_3'
4	x_4'
5	x_m
6	$\Sigma f(x_m)$

Teoría

- una integral indefinida entre b y a se aproxima así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{9}\left[f(x_1') + \cdots + f(x_4') + f(-x_1') + \cdots + f(-x_4') + f(0)\right]$$

donde $x_i = \frac{1}{2}\left[b+a + (b-a)x_i'\right]$

y las constantes son:

$x_1' = 0.9115893083$ $\quad$ $x_3' = 0.5287617830$

$x_2' = 0.6010186551$ $\quad$ $x_4' = 0.1679061843$

Características

- exacta hasta para polinomios de grado 9 ó inferior
- precisión en los demas casos de 4 ó 5 cifras como media
- mayor precisión cuanto menor sea b − a
- R_7 libre
- 22 pasos para definir f(x) con x en pantalla y R_5
- resulta Error si f(x) ó f(0) no estan definidas

Utilización

- previamente almacenar constantes x_i': STO i
- definir f(x) ≡ GTO 12, f(x), GTO 35, x en X y R_5
- f PRGM
- calcular la integral

$\boxed{R/S} \to 1$

$\boxed{RCL\ 1}\ \boxed{R/S} \to 2$

$\boxed{RCL\ 2}\ \boxed{R/S} \to 3$

$\boxed{RCL\ 3}\ \boxed{R/S} \to 4$

$\boxed{RCL\ 4}\ \boxed{R/S} \to \int_a^b f(x)\,dx$

- para otra función, definirla y proceder igual

si el intervalo no es el (−1, 1), se hace el cambio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt \qquad \text{donde} \quad \begin{cases} x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \\ dx = \frac{b-a}{2}\,dt. \end{cases}$$

Ejemplos

- 1 ≡ Hallar la longitud de la elipse de semiejes $a = 2$, $b = 1$

$$\mathcal{L} = 8\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{3}{4}\,\text{sen}^2 x}\; dx = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \frac{3}{4}\,\text{sen}^2\left[\frac{\pi}{4}(1+t)\right]}\; dt$$

haciendo el cambio, $x = \frac{\pi}{4}(1+t)$, $dx = \frac{\pi}{4}\,dt$, que convierte $[\pi/2, 0]$ en $[1, -1]$

- se define así, GTO 12, RAD

$\boxed{1}\boxed{+}\boxed{\pi}\boxed{\times}\boxed{4}\boxed{\div}\boxed{SIN}\boxed{x^2}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{4}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{-}\boxed{CHS}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\pi}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{GTO\ 35}$

- f PRGM, $\boxed{R/S} \to 1$

$\boxed{RCL\ 1}\boxed{R/S} \to 2$ $\boxed{RCL\ 2}\boxed{R/S} \to 3$ $\boxed{RCL\ 3}\boxed{R/S} \to 4$ $\boxed{RCL\ 4}\boxed{R/S} \to I$ = longitud

resulta = longitud de la elipse = 9,68844 exacto con 5 decimales.

- 2 ≡ Hallar la integral $I = \int_3^5 (x^6 - 4x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 5x + 3)\,dx$

- hacemos el cambio $x = 4 + t$, $dx = dt$, que convierte $[5, 3]$ en $[1, -1]$

- se define, GTO 12

$\boxed{4}\boxed{+}\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow}\boxed{4}\boxed{-}\boxed{\times}\boxed{9}\boxed{+}\boxed{\times}\boxed{7}\boxed{-}\boxed{\times}\boxed{2}\boxed{+}\boxed{\times}\boxed{5}\boxed{-}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{+}$

- f PRGM, etc.

el resultado es $= I = 5184,552382$ exacto con 10 cifras

- el resultado es exacto por ser polinomio de grado $6 < 9$

- 3 ≡ Hallar la integral $I = \int_1^2 \text{arctg}\left(\frac{2x+3}{3x+4}\right) dx$

- hacemos el cambio $x = \frac{3+t}{2}$, $dx = \frac{dt}{2}$, $\Rightarrow I = I(t)$

- la integral se convierte en

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \text{arctg}\left(\frac{2t+12}{3t+17}\right) = 0.614934536\,5$$ exacta con 9 cifras

- la integral exacta es

$$I = x\,\text{arctg}\left(\frac{2x+3}{3x+4}\right) + \frac{1}{26}\,L(13x^2+36x+25) + \frac{18}{13}\,\text{arctg}\,(-13x-18)\Bigg|_1^2 =$$

$= 0.614934536\,0$, que prueba lo anterior.

Derivación aproximada = cálculo de $y'(x)$

1	STO 0	...	GTO 38
2	STO 2	38	RCL 0
3	EEX	39	x = 0
4	CHS	40	GTO 46
5	5	41	CLX
6	STO 3	42	STO 0
7	×	43	RCL 3
8	STO 7	44	−
9	STO + 7	45	GTO 11
10	LAST X	46	R↓
11	e^x	47	−
12	RCL 2	48	RCL 7
13	×	49	÷
14	STO 1		
15	$f(x)$		
...	---		

0	x, 0
1	x_n
2	x
3	10^{-5}
7	$2 \cdot 10^{-5} x$

Teoría

- el programa calcula una derivada basada en la fórmula

$$y'(x) \simeq \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} \quad , \quad \text{con } h = 10^{-5} x$$

Características

- aproximación media de 5 cifras
- para cualquier x definido excepto x = 0
- 3 registros libres, R_4, R_5, R_6
- 23 pasos para definir $f(x)$, cuidando de no utilizar ni borrar el registro T, x en R_1

Utilización

- GTO 14
- definir $f(x)$, con x en pantalla y R_1, sin usar T
- GTO 38
- f PRGM
- introducir argumentos

$$x \ \boxed{R/S} \longrightarrow y'(x)$$

e igual para otro argumento $x \neq 0$

Nota

es especialmente útil cuando $y(x)$ es larga o complicada

Ejemplos

- 1 ≡ Hallar valores de $y'(x)$ siendo $y(x) = \frac{1}{2} L\left[1 + \frac{3x}{x^2 - x + 1}\right] + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

  - definimos la función $y(x)$

    [3] [×] [RCL 1] [x²] [LASTX] [−] [1] [+] [÷] [1] [+] [√] [Ln] [RCL 1] [RCL 4] [×] [RCL 5] [+] [TAN⁻¹] [RCL 6] [×] [+] [STO 38]

  - almacenemos $\frac{2}{\sqrt{3}}$ STO 4, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ STO 5, $\sqrt{3}$ STO 6

  - calculamos valores, RAD

x	y'(x)	y' EXACTA 5	x	y'(x)	EXACTA 6
1	1.50000	1.50000	−2	−0.428575	−0.428571
2	0.33333	0.33333	−3	−0.115383	−0.115385
3	0.10715	0.10714	−4	−0.047625	−0.047620
4	0.04614	0.04615	10^{-4}	3.000000	3.000.000

  - la derivada exacta es $y'(x) = \frac{3}{1+x^3}$, exactitud de 5 a 6 cifras

- 2 ≡ Hallar valores de $y'(x)$ siendo $y(x) = (x^x)^{x^x}$

  - se define [↑] [yˣ] [↑] [yˣ] [STO 38]
  - calculamos valores

$$\begin{cases} y'(1) \simeq 0{,}99998 \quad (\text{exacto} = 1) & y'(0.1) = -0{,}66335 \quad (-0{,}66331) \\ y'(2) = 4137{,}33 \quad (\text{exacto} = 4137{,}32) & y'(10^{-4}) = -8{,}1500 \quad (-8{,}18769) \\ y'(3) \simeq 1.07937 \cdot 10^{41} \quad (\text{exacto} = 1.07936 \cdot 10^{41}) & y'(e) = 8.7506 \cdot 10^{19} \; (8.7507 \cdot 10^{19}) \end{cases}$$

  - compárese con la $y'(x)$ exacta ⇒ $y'(x) = \left[x^{x+1}\left(Lx + 1 + \frac{1}{x}\right) . Lx + x^x\right] . (x^x)^{x^x}$

- 3 ≡ Hallar valores de $y'(x)$, con $y(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x + Lx}{\cos x - e^x} \cdot \sqrt{x}$

  - resulta

$$\begin{cases} y'(1) = -0.507805 \quad (-0.50783) & y'(5) = 0.039377 \; (\text{igual}) \\ y'(2) = 0.270480 \quad (-0.270481) & y'(10) = 0.000209 \; (\text{igual}) \\ y'(3) = 0.068470 \quad (\text{igual}) & y'(0.5) = -3.3531 \; (\text{igual}) \end{cases}$$

- Compárese con y' (exacta)

$$y'(x) = \frac{(\operatorname{sen} 2x + 1/x)(\cos x - e^x) + (\operatorname{sen}^2 x + Lx)(\operatorname{sen} x + e^x)}{(\cos x - e^x)^2} \cdot \sqrt{x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x + Lx}{\cos x - e^x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Integrales definidas: Método de Gauss-Legendre

1	CLX	16	STO 5
2	STO 7	17	R↓
3	STO 6	18	STO 0
4	1	19	f(x)
5	1	⋮	GTO 41
6	STO + 6	⋮	
7	RCL 6	41	RCL 5
8	3	42	×
9	3	43	STO + 7
10	x⇌y	44	RCL 0
11	GTO 49	45	x<0
12	R↓	46	GTO 04
13	2	47	CHS
14	+	48	GTO 18
15	R/S	49	RCL 7

0	x_m
1	$\pm x_1$
2	$\pm x_2$
3	A_1
4	A_2
5	A_m
6	contador
7	Σ

Teoría

- el programa se adapta a dos versiones

$$\int_{-1}^{1} y(x)\,dx \simeq \sum_{1}^{4} y(x_i)\,A_i$$

con $\begin{cases} x_1 = 0.86113631 & A_1 = 0.34785485 \\ x_2 = 0.33998104 & A_2 = 0.65214515 \end{cases}$

ó bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, y(x)\,dx \simeq \sum_{1}^{4} y(x_i)\,A_i$$

con $\begin{cases} x_1 = 0.52464762 & A_1 = 0.80491409 \\ x_2 = 1.65068012 & A_2 = 0.08131284 \end{cases}$

Características

- es la "formula de 4 puntos"
- menos exacta que la de Chebyshev
- 21 pasos para f(x), x en pantalla y R_0.

Utilización

- almacenar previamente las constantes, x_1 STO 1, x_2 STO 2, A_1 STO 3, A_2 STO 4
- GTO 18, definir f(x) y GTO 41
- $\boxed{R/S}$ ⟶ 13

$\boxed{RCL\ 1}$

$\boxed{RCL\ 3}$ $\boxed{R/S}$ ⟶ 24

$\boxed{RCL\ 2}$

$\boxed{RCL\ 4}$ $\boxed{R/S}$ ⟶ integral

- para otro caso, definir la función y proseguir igual.

Ejemplos

- 1 ≡ Hallar la $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x \, dx$ aproximadamente

  - GTO 18
  - pulsar $\boxed{\cos}\ \boxed{GTO\ 4}$
  - f PRGM, RAD, se introducen las constantes de la 2ª versión

  $\boxed{R/S} \rightarrow 13\ \boxed{RCL\ 1}\ \boxed{RCL\ 3}\ \boxed{R/S} \longrightarrow 24\ \boxed{RCL\ 2}\ \boxed{RCL\ 4}\ \boxed{R/S} \longrightarrow \underline{1,3803}$

  el resultado exacto es $I = 1,3804$

- 2 ≡ Hallar la $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} . x^2 \, dx$.

  - se define $\boxed{x^2}\ \boxed{GTO\ 4}$
  - procediendo como antes, resulta $I = \underline{0.88622694}$ (exacto $= 0.88622693$)
  - esta exactitud se debe a que la fórmula es exacta para grado $n \leq 7$

- 3 ≡ Hallar la $I = \int_0^1 \operatorname{sen} x^2 \, dx$

  - hacemos el cambio $x = \frac{1+t}{2}$, $dx = \frac{dt}{2}$, que convierte $[1,0]$ en $[1,-1]$
  - almacenamos las constantes de la 1ª versión
  - definimos $y(x)$, g RAD, f PRGM,

  el resultado es $\underline{I \simeq 0.310266}$ (exacto, $0,310268$)

- 4 ≡ Hallar la $I = \int_0^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} x} \, dx$

  - hacemos el cambio $x = \frac{\pi}{4}(1+t)$, $dx = \frac{\pi}{4} dt$, convierte $[\pi/2, 0]$ en $[1,-1]$
  - definimos la función
  - calculamos la integral

  el resultado es $\underline{I \simeq 3.1044}$

  exactamente, $I = 3.1044$ con 4 decimales.

Integrales definidas: Método de Gauss - Chebyshev

1	CLX	35	RCL 6
2	STO 7	36	x = 0
3	STO 0	37	GTO 44
4	1	38	x < 0
5	STO + 0	39	GTO 04
6	RCL 0	40	CHS
7	6	41	GTO 12
8	x = y	42	CLX
9	GTO 42	43	GTO 12
10	x⇄y	44	RCL 7
11	R/S	45	π
12	STO 6	46	×
13	f(x)	47	1
...	GTO 34	48	1
...		49	÷
34	STO + 7		

0	1, 2, ... 6
1	x_1
2	x_2
3	x_3
4	x_4
5	x_5
6	x_m
7	$\Sigma f(x_m)$

Teoría

- es una variación del método de Chebyshev, aplicado a:

$$\int_{-1}^{1} \frac{y(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \approx \frac{\pi}{11} \sum_{1}^{11} y(x_i)$$

donde
$x_1 = 0.2817325571$ STO 1
$x_2 = 0.5406408174$ STO 2
$x_3 = 0.7557495743$ STO 3
$x_4 = 0.9096319955$ STO 4
$x_5 = 0.9898214419$ STO 5

Características

- exacta para $y(x)$ de grado $m \leq 11$
- cualquier intervalo se reduce al $(1, -1)$ $\Rightarrow$ $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$, $dx = \frac{b-a}{2} dt$
- 21 pasos para $f(x)$, con x en pantalla y R_6

Utilización

- almacenar previamente las constantes
- definir la función

GTO 12, $y(x)$, GTO 34

- calcular la integral, f PRGM, R/S

$\boxed{R/S} \to 1$

$\boxed{RCL\ 1}\boxed{R/S} \to 2$

$\boxed{RCL\ 2}\boxed{R/S} \to 3$

$\boxed{RCL\ 3}\boxed{R/S} \to 4$

$\boxed{RCL\ 4}\boxed{R/S} \to 5$

$\boxed{RCL\ 5}\boxed{R/S} \to$ integral

- igual para otro caso.

Ejemplos

1 ≡ Hallar la integral $\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$

- se almacenan las constantes
- se define $y(x) \Rightarrow$ GTO 12 $\boxed{x^2}\boxed{x^2}\boxed{GTO\ 34}$
- g PRGM, operando como se dijo, resulta

$I = \underline{1.178097245}$ (exacto, $\frac{3\pi}{8} = 1.178097245$)

- la exactitud proviene de que x^4 es de grado $4 < 11$

2 ≡ Hallar la integral $\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

- se define $y(x) \Rightarrow$ GTO 12 $\boxed{\cos}\boxed{GTO\ 34}$
- g RAD, PRGM ; y se procede como antes

el resultado es $I \simeq \underline{2.404}$ (con 3 cifras, 2.404)

3 ≡ Hallar la integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} dx$

- se define $y(x)$, GTO 12 $\boxed{x^2}\boxed{1}\boxed{+}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{GTO\ 34}$
- g PRGM,
- procediendo como antes, resulta

$I \simeq \underline{3.820}$ (con 3 cifras, 3.820)

Ecuaciones diferenciales: método de Euler

1	CL X	29	RCL 4
2	STO 4	30	X=0
3	RCL 2	31	GTO 06
4	RCL 1	32	R↓
5	GTO 18	33	RCL 3
6	R↓	34	+
7	STO 3	35	RCL 0
8	RCL 0	36	×
9	×	37	2
10	RCL 2	38	÷
11	+	39	RCL 2
12	RCL 1	40	+
13	RCL 0	41	STO 2
14	+	42	RCL 1
15	1	43	RCL 0
16	STO 4	44	+
17	R↓	45	STO 1
18	g(x,y)	46	PAUSE
		47	x⇄y
	GTO 29	48	PAUSE
		49	GTO 01

0	h
1	x
2	y
3	y'
4	señal

Teoría

- dada una ecuación diferencial de 1er orden

$$y' = f(x, y)$$

y su valor inicial (x_0, y_0)

se calculan valores numéricos de y para sucesivos x a partir de x_0, con un incremento h especificado

- Se utiliza el método de Euler (pronosticador – corrector)

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \hat{y}_{i+1})\right]$$

Características

- 11 pasos para $f(x,y)$ con x en X, y en Y y registros R_1 y R_2
- R_5, R_6, R_7 libres
- presenta brevemente (x, y) sucesivos

Utilización

- definir $f(x,y)$,

  GTO 17, $f(x,y)$, GTO 29

- almacenar el incremento

  h STO 0

- almacenar condición inicial

  x_0 STO 1

  y_0 STO 2

- calcular valores, fPRGM

$\boxed{R/S} \rightarrow (x_i) \rightarrow (y_i)$

$\rightarrow (x_{i+1}) \rightarrow (y_{i+1})$, etc.

Ejemplos

1 ≡ Hallar valores sucesivos para la ecuación $y' = x\sqrt{y}$, con $x_0 = 1$, $y_0 = 1$

- definimos $f(x,y)$ ⇒ $\boxed{x\rightleftarrows y}\boxed{\sqrt{x}}\boxed{\times}\boxed{GTO\ 29}$
- almacenamos constantes

$$\left.\begin{array}{ll} h = 0.05 & STO\ 0 \\ x_0 = 1 & STO\ 1 \\ y_0 = 1 & STO\ 2 \end{array}\right\}$$

- calculamos valores ⇒ $\boxed{R/S}$

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40
y	1,00	1,0519	1,1077	1,1677	1,2321	1,3010	1,3747	1,4534	1,5375
exacto.	1,00	1,0519	1,1078	1,1678	1,2321	1,3010	1,3748	1,4535	1,5376

- la solución exacta es $y = \left(\frac{x^2+3}{4}\right)^2$

2 ≡ Hallar la velocidad límite de una gota de agua que cae en el aire, si su movimiento sigue la ecuación $y' = 32 - 2y^2$ (donde y = velocidad)

- se define $\boxed{R\downarrow}\boxed{x^2}\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{-}\boxed{CHS}\boxed{GTO\ 29}$
- utilizamos $h = 0.1$ STO 0,
- escogemos valores iniciales cualesquiera ($t = 0$ STO 1, $v = 2$ STO 2)

1- f PRGM, R/S ⇒

- hallamos que los valores convergen según t crece

t	0.10	0.50	1.00	1.50	2.00	2.40	2.50	2.60	2.70
v	2.8640	3.7930	3.9706	3.9957	3.9994	3.9999	3.9999	3.9999	4.0000

- luego podemos decir que velocidad límite = 4 m/sg

3 ≡ Dada la ecuación $y' = \sqrt{1-y^2}$, con $y(0) = 0$, hallar el valor de $y(\pi/2)$

- con $h = 0.05$, se obtienen, entre otros

$y(0.5) = 0.4793$, $y(1,0) = 0.8412$, $y(1.5) = 0.9966$

- parando en $x = 1,5$ y poniendo $h = 0.01$, se obtienen

$y(1.55) = 0.9995$, $y(1.57) = 0.9999$

- ahora con $h = 0.0001$, parando en $x = 1.5708$, resulta

$y(\pi/2) \simeq y(1.5708) = 0.9999$ (exactamente es 1,0000)

Ecuaciones diferenciales: método de Runge-Kutta

1	CLX	30	RCL 2
2	STO 3	31	+
3	RCL 2	32	RCL 0
4	RCL 1	33	RCL 4
5	$f(x,y)$	34	×
	GTO 18	35	RCL 1
		36	+
		37	GTO 05
18	RCL 0	38	STO ÷ 7
19	×	39	÷
20	RCL 7	40	STO − 3
21	$x < 0$	41	RCL 5
22	GTO 38	42	STO + 3
23	R↓	43	8
24	STO 5	44	STO ÷ 3
25	STO + 3	45	RCL 0
26	STO + 3	46	STO + 1
27	RCL 4	47	RCL 3
28	STO − 7	48	STO + 2
29	×	49	RCL 2

0	h
1	x_m
2	y_m
3	Σ
4	2/3
5	K_1, K_2
7	señal

Teoría

– para resolver la ecuación diferencial lineal ó no de 1er orden

$$y' = f(x,y) \quad \text{con condición inicial } y(x_0) = y_0$$

se emplea el método de Runge-Kutta. Se calcula:

$$\begin{cases} K_1 = h\, f(x,y) \\ K_2 = h\, f(x + \frac{2}{3}h,\ y + \frac{2}{3}K_1) \\ K_3 = h\, f(x + \frac{2}{3}h,\ y + \frac{2}{3}K_2) \end{cases}$$

y entonces, $y(x+h) \simeq y(x) + \frac{1}{8}[2K_1 + 3K_2 + 3K_3]$

esto reproduce la serie de Taylor hasta el 4º término. El error es Ch^4

Características

– R_6 libre

– 13 pasos para definir $f(x,y)$, con X en x, e y en Y

– presenta cada y_m sucesiva, que queda en R_2, x_m en R_1

– exactitud de 4 a 5 cifras con $h = 0.1$

Utilización

– previamente h STO 0 $\quad y_0$ STO 2

x_0 STO 1 $\quad$ 2/3 STO 4 } permanecen almacenadas

1 STO 7

– definir $f(x,y)$ ⇒ GTO 04, $f(x,y)$, GTO 18

– calcular valores sucesivos de y ⇒ $y_m = y(x + mh)$

f PRGM, $\boxed{R/S} \longrightarrow y_1$

$\boxed{R/S} \longrightarrow y_2$ -- -- $\boxed{R/S} \longrightarrow y_m$

– para cambiar la $f(x,y)$ volver a definirla, y almacenar (x_0, y_0)

– " " h, ⇒ h STO 0

– Advertencia:

para definir $f(x,y)$, x sólo en X, y sólo en Y

h puede ser negativo

Ejemplos =

1 ≡ Resolver la ecuación $y' = x y^{1/3}$, desde $x = 1$ a 5, con $y(1) = \cancel{y}\ 1$

- se define $f(x,y) \Rightarrow$ GTO 04, $\boxed{x \rightleftarrows y}$ $\boxed{RCL\ 6}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{GTO\ 18}$

- se almacenan las constantes, y las condiciones 1 STO 1, 1 STO 2

- se almacena el intervalo $h = 0.1$, y además $\frac{1}{3}$ STO 6, f PRGM

- se calculan sucesivamente $y(x = 1.1)$, $y(1.2)$ -- $y(5)$, y resulta (60 iteraciones)

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
y	1,00000	1.68617	2.82842	4.56034	7.02111	10.35236	14,69690	20.19818	26.99995	35.24617	45.08093
exacto	1,00000	1.68617	2.82843	4.56036	7.02113	10.35238	14,69694	20.19822	27,00000	35.24623	45.08100

- la y exacta es $y = [(x^2+2)/3]^{1.5}$

2 ≡ Resolver la ecuación $y' = x^3 y^3 - x y$, con $y(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, desde 0 hasta 1

- almacenamos 0 STO 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ STO 2, $h = 0.1$ STO 0,
- definimos $f(x,y) \Rightarrow$ GTO 04 $\boxed{\times}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{LASTX}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{LASTX}$ $\boxed{-}$ $\boxed{GTO\ 18}$, f PRGM
- calculamos $y(0.1)$, $y(0.2)$ -- $y(1)$, resulta (10 iteraciones)

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.70359	0.69324	0.6[illegible]7663	0.65462	0.62819	0.59832	0.56592	0.53175	0.49642	0.46037
exacto	igual	igual	0.67664	0.65463	0.62820	0.59833	0.56593	0.53176	0.49642	0.46037

- la y exacta es $y = (x^2 + e^{x^2} + 1)^{-0.5}$

3 ≡ Resolver la ecuación $y' = \sqrt{\frac{y}{1+x}}$ para $x = 0$ a 3 con $y(0) = 4$

- almacenamos 0 STO 1, 4 STO 2, $0.1 = h$ STO 0
- definimos $f(x,y) \Rightarrow$ GTO 04 $\boxed{1}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{GTO\ 18}$, f PRGM
- calculamos $y(0.1)$, $y(0.2)$ --- $y(3)$, y resulta (30 iteraciones)

x	0.5	0.7	1	1.3	1.5	1.7	2	2.3	2.5	2.7	3
y	4.94949	5.30769	5.82843	6.33316	6.66228	6.98634	7.46411	7.93319	8.24166	8.54708	9.00001
exacto	igual	5.30768	igual	6.33315	igual	igual	7.46410	7.93318	igual	igual	9,00000

- la y exacta es $y = (\sqrt{x+1} + 1)^2$

Ecuaciones diferenciales : Runge-Kutta de cuarto orden

1	RCL 2	29	$x \geq y$
2	RCL 1	30	STO + 3
	$f(x,y)$ GTO 13	31	$\times$
		32	RCL 2
		33	+
13	RCL 0	34	RCL 4
14	$\times$	35	STO − 7
15	STO + 3	36	RCL 0
16	RCL 7	37	$\times$
17	$x < 0$	38	RCL 1
18	GTO 41	39	+
19	1	40	GTO 03
20	$x \neq y$	41	STO ÷ 7
21	GTO 26	42	RCL 3
22	+	43	STO − 3
23	$\frac{1}{x}$	44	6
24	STO 4	45	÷
25	GTO 31	46	STO + 2
26	−	47	RCL 0
27	CHS	48	STO + 1
28	STO 4	49	RCL 2

0	h
1	x_n
2	y_n
3	Σ
4	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$
5	
6	
7	Señal

Teoría

- Para resolver ecuaciones diferenciales de 1er orden $y' = f(x,y)$ con condición inicial $y(x_0) = y_0$.
- Se emplea el método de Runge-Kutta:

$$\begin{cases} k_1 = h f(x,y) \\ k_2 = h f(x+\frac{1}{2}h, y+\frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = h f(x+\frac{1}{2}h, y+\frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = h f(x+h, y+k_3) \end{cases}$$

$$y(x+h) \simeq y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

esto reproduce la serie de Taylor hasta el 5º término.
El error es Ch^5.

Características

- 10 pasos para definir $f(x,y)$ con x en X e y en Y.
- R_5, R_6 libres
- Presenta cada y_n sucesiva, que queda en R_2, x_n en R_1
- Exactitud de 5 a 7 cifras con $h = 0.1$

Utilización

1) 0 STO 3 } Sólo la primera vez
   1 STO 7 }

2) definir $f(x,y)$; GTO 02 // $f(x,y)$ GTO 13

3) almacenar h y valores de partida

   h STO 0 (h puede ser negativo)

   x_0 STO 1

   y_0 STO 2

4) calcular valores sucesivos de y ; $y_n = y(x_0 + nh)$

   f PRGM , $\boxed{R/S} \rightarrow y_1$

   $\boxed{R/S} \rightarrow y_2$ ---- $\boxed{R/S} \rightarrow y_n$

5) para cambiar $f(x,y)$ volver a definirla y almacenar (x_0, y_0)

6) para cambiar $h \rightarrow h$ STO 0 (h puede ser negativo)

Derivación aproximada: cálculo de $y''(x)$

1	↑	32	STO − 4
2	↑	33	STO − 1
3	RCL 0	34	GTO 12
4	×	35	x = 0
5	ABS	36	GTO 42
6	STO 4	37	CHS
7	STO 3	38	STO 4
8	+	39	STO + 1
9	STO 1	40	STO + 1
10	CLX	41	GTO 12
11	STO 2	42	R↓
12	RCL 1	43	3
13	g(x)	44	×
'''	GTO 28	45	STO − 2
''''		46	RCL 2
28	STO + 2	47	RCL 3
29	RCL 4	48	x^2
30	x ≥ 0	49	÷
31	GTO 35		

0	h
1	x+h, x−h, x
2	Σ
3	h
4	h, −h, 0

Teoría

- aproximadamente:

$$y''(x) \simeq \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

donde $h = 2.10^{-3}\,x$

Características

- para todo $x \neq 0$ y $|x| > 0.01$, conveniente
- 3 registros libres, R_5, R_6, R_7
- 15 pasos para definir $y(x)$, con x en pantalla y R_1
- aproximación de 3−4 cifras

Utilización

- previamente $h = 2.10^{-3}$ STO 0
- definir $y(x)$, x en pantalla y R_1

GTO 12, $\boxed{g(x)}$, $\boxed{\text{GTO 28}}$, f PRGM

- introducir x

x $\boxed{R/S}$ ⟶ $y''(x)$

igual para otros x. Para definir otra $y(x)$, ir al paso apropiado

Nota

- es muy apropiado cuando $y(x)$ es muy complicada, junto con el programa de $y'(x)$, permite hallar desarrollos limitados hasta x^2 en un punto cualquiera $x \neq 0$

Ejemplos

1 ≡ Hallense valores de $y''(x)$, siendo $y(x) = \operatorname{sen} x^{\operatorname{sen} x + \cos x}$

- previamente, 2.10^{-3} STO 0 , RAD
- definimos $y(x)$ ⇒ GTO 12 [SIN] [LASTX] [COS] [+] [RCL 1] [SIN] [X⇄Y] [y^x] [GTO 28]
- calculamos valores . Resulta :

X	y''(x)	EXACTO	X	y''(x)	EXACTO
1	-0.95925	-0.95923	e	21,289	21,285
2	0.64269	0.64272	π/2	-1.0000	-1.0000
3	652,6	651,4	1/2	0.4990	0.4989

exactitudes variables , 3-4 cifras

la y'' exacta es $y'' = \operatorname{sen} x^{\operatorname{sen} x + \cos x}\left[\left[(\cos x - \operatorname{sen} x) L \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{tg} x}\right]^2 + \right.$

$\left. + \frac{2(\cos x - \operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg} x} - (\operatorname{sen} x + \cos x) L \operatorname{sen} x - \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^2 x}\right]$

2 ≡ Siendo $y = \operatorname{sen} x . L(x^2 + x + 1)$, hallar valores de $y''(x)$

- definimos $y(x)$ ⇒ GTO 12 [x^2] [LASTX] [+] [1] [+] [LN] [RCL 1] [SIN] [×] [GTO 28]
- calculamos algunos valores . Esto da : (exactitud de 4-5 cifras)

x	y''(x)	EXACTO	x	y''(x)	EXACTO	x	y''(x)	EXACTO
1	-0.1243	-0.1243	-1	-1.92209	-1.92208	π	-1.03961	-1.03962
2	-2.56806	-2.56803	-2	2.13437	2.13436	10	2.2542	2.2543
3	-1.44733	-1.44732	-3	1.72056	1.72056	1/10	2.2043	2.2041

la y'' exacta es $y'' = 2 \cos x . \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2x^2+2x+3}{(x^2+x+1)^2} . \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x . L(x^2+x+1)$

3 ≡ Teniendo $y(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, calcular $y''(\pm 1)$, $y''(\pm 2)$, $y''(\pm 3)$, $y''(e)$, $y''(\frac{1}{2})$, $y''(10)$

- definimos $y(x)$, GTO 12 [x^2] [LASTX] [+] [1] [+] [√] [GTO 28]
- se calculan los valores pedidos : (exactitud de 3-4 cifras)

$y''(1) = 0.1443$ (igual) , $y''(-1) = 0.7500$ (0,7503) , $y''(e) = 0.02027$ (0.02026)

$y''(2) = 0.04050$ (igual) , $y''(-2) = 0.14431$ (0.14434) , $y''(\frac{1}{2}) = 0.323$ (0.324)

$y''(3) = 0.0158$ (0.0160) , $y''(-3) = 0.04050$ (igual) , $y''(10) = 0.00065$ (0.00064)

la segunda derivada es $y'' = \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x^2+x+1} + \frac{(2x+1)^2}{4(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ exactamente

Integrales definidas: método de Runge-Kutta

1	RCL 1	35	÷
2	$f(x)$	36	RCL 1
	GTO 23	37	+
		38	GTO 02
23	RCL 0	39	STO − 4
24	×	40	×
25	RCL 4	41	STO + 3
26	$x \neq 0$	42	4
27	GTO 39	43	STO ÷ 3
28	R↓	44	RCL 3
29	STO 3	45	STO − 3
30	RCL 0	46	STO + 2
31	2	47	RCL 0
32	×	48	STO + 1
33	3	49	RCL 2
34	STO 4		

Teoría

- es una variante del método Runge-Kutta aplicado a

$$y' = f(x)$$

o lo que es igual, $y = \int_a^b f(x)\,dx$, condición: $y(a) = 0$

- las ecuaciones de Runge se reducen a:

$$\begin{cases} K_1 = h\, f(x) \\ K_2 = h\, f(x + \frac{2}{3} h) \end{cases}$$

$$y(x+h) \simeq y(x) + \frac{1}{4}[K_1 + 3K_2]$$

- el cálculo progresa así

$$I_1 = \int_a^{a+h} f(x)\,dx, \quad I_2 = \int_a^{a+2h} f(x)\,dx, \ \cdots \ I = \int_a^{a+mh=b} f(x)\,dx$$

0	$h = \frac{b-a}{m}$
1	$x_1, \ldots x_m$
2	$I_1 \ldots I_m$
3	Σ
4	señal

Características

- R_5, R_6, R_7 libres
- 22 pasos para definir $f(x)$, con X en pantalla
- presenta I parciales
- exactitud de 5 cifras media para $h = \frac{b-a}{m} \simeq 0.1$

Utilización

- siendo m el nº de pasos, ingresar $h = \frac{b-a}{m}$ (recomendable $h \leq 0.1$)

  h STO 0

- almacenar condiciones iniciales

  a STO 1, 0 STO 2, 0 STO 4 (sólo al principio)

- definir $f(x)$ (x en pantalla)

  GTO 01 $\boxed{f(x)}$ $\boxed{\text{GTO } 23}$, PRGM

- calcular I sucesivas

m veces:

$\boxed{R/S} \longrightarrow I_1 = \int_a^{a+h} f(x)\,dx$,

$\boxed{R/S} \longrightarrow I_m = \int_a^b f(x)\,dx$

Ejemplos

1 ≡ Hallar la integral definida $\int_1^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

- en 10 pasos, $h = \frac{2-1}{10} = 0.1$ STO 0
- $a = 1$ STO 1, 0 STO 2, 0 STO 4
- definimos $f(x)$ ≡ GTO 01 $\boxed{SIN}\boxed{LASTx}\boxed{\div}\boxed{GTO\ 23}$, PRGM, RAD
- calculamos integrales parciales sucesivas: $I_1, I_2 \ldots I_{10}$

la última es $I_{10} = \underline{0.659329}$ (exacta con 6 decimales)

- utilizando $h = 0.5$, en 2 pasos da $I_2 = 0.6592$ (cuatro decimales exactos)

2 ≡ Hallar la integral elíptica $\int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$ para $\varphi = 1.099557429$, $k = \operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$

- en 10 pasos, $h = \frac{1{,}099\ldots - 0}{10} = 0{,}1099\ldots$ STO 0
- $a = 0$ STO 1, 0 STO 2
- se define $f(x)$ ≡ GTO 01 $\boxed{SIN}\boxed{RCL\ 6}\boxed{\times}\boxed{x^2}\boxed{1}\boxed{-}\boxed{CHS}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{1/x}\boxed{GTO\ 23}$, PRGM, RAD
- almacenamos constantes = $\operatorname{sen} \frac{\pi}{12}$ STO 6
- calculamos integrales sucesivas

resulta, $I_{10} = \underline{1.111512}$ (exacto con 6 decimales)

- utilizando sólo 2 pasos, resulta $I_2 = 1.1116$ (cuatro decimales)

3 ≡ Calcular la integral $\int_1^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+3}{3x+4}\right) dx$

- en 10 pasos, $h = 0.1$ STO 0
- $a = 1$ STO 1, 0 STO 2
- se define $f(x)$ ≡ GTO 01 $\boxed{STO\ 7}\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{RCL\ 7}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{4}\boxed{+}\boxed{\div}\boxed{TAN^{-1}}\boxed{GTO\ 23}$
- calculando integrales sucesivas, PRGM, RAD

resulta, $I_{10} = \underline{0.6149357}$ (exacta = 0.61493454)

- en solamente 2 pasos ($h = 0.5$) resultaría $I_2 = 0.614938$ (casi 6 cifras exactas)

Integración de funciones empíricas: Regla de Simpson

1	RCL 0	14	4
2	3	15	×
3	÷	16	STO+1
4	STO 0	17	RCL 1
5	×	18	R/S
6	STO 1	19	RCL 0
7	R/S	20	×
8	RCL 0	21	2
9	×	22	×
10	STO+1	23	STO+1
11	R/S	24	RCL 1
12	RCL 0	25	GTO 11
13	×		

0	h/3
1	Σ

Teoría

- Si se conocen los valores $f(x)$ de una función experimental para las abcisas $x_0, \dots, x_n$ igualmente espaciadas donde n es nº par, la integral de la función en x_0, x_n se aproxima por la regla de Simpson:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\dots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

donde h es un incremento ∋, $h = x_1 - x_0$

Características

- R0 y R1 ocupados
- presenta sumas parciales

Utilización

- almacenar incremento $h = x_1 - x_0$ STO 0
- introducir primer valor, PRGM

  $f(x_0)$ $\boxed{R/S}$ $\longrightarrow$ suma parcial

- introducir último valor

  $f(x_n)$ $\boxed{R/S}$ $\longrightarrow$ suma parcial

- introducir valores intermedios

  $f(x_1)$ $\boxed{R/S}$ $\longrightarrow$ s. parcial

  $f(x_{n-1})$ $\boxed{R/S}$ $\longrightarrow$ Integral

- para otro caso, repetir todo

Ejemplos

1 ≡ Dados los siguientes valores pertenecientes a $f(x)$, Hallar $\int_1^2 f(x)\,dx$

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$	0.00000	0.09531	0.18232	0.26236	0.33647	0.40547	0.47000	0.53063	0.58779	0.64185	0.69315

- almacenamos h = 0.1 STO 0
- introducimos 1er valor 0 PRGM $\boxed{R/S}$
- " ultimo " 0.69315 $\boxed{R/S}$
- " valores sucesivos 0.09531 $\boxed{R/S}$
- - - - - -
- - - - - -
- 0.64185 $\boxed{R/S}$ ⟶ I = 0.386293

(los datos son de $f(x) = \ln x \Rightarrow I = \int_1^2 \ln x\,dx = 0.386293$ con 6 cifras)

2 ≡ Calcular $\int_1^2 f(x)\,dx$ dada la tabla de valores pertenecientes a $f(x)$.

1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
10.000	12.589	15.849	19.953	25.119	31.623	39.811	50.119	63.096	79.433	100.00

- procedemos como antes y resulta I = 39.087

(los datos son de $f(x) = 10^x \Rightarrow I = \int_1^2 10^x\,dx = 39.087$ con 5 cifras)

3 ≡ Calcular $\int_1^2 f(x)\,dx$, si se dan los valores siguientes de $f(x)$

1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
0.62025	0.61895	0.61776	0.61665	0.61562	0.61466	0.61377	0.61294	0.61215	0.61142	0.61073

- procediendo como en el ejemplo 1,

resulta I = 0.614935

- los datos proceden de $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+3}{3x+4}\right)$

- la integral exacta es $\int_1^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+3}{3x+4}\right)dx = 0.614935$ (6 decimales)

Ecuaciones diferenciales de 2º orden : $y'' = F(x,y)$

1	RCL 2	30	10^x
2	RCL 1	31	STO − 7
3	F(x,y)	32	×
4 … 14	GTO 15	33	STO + 6
		34	RCL 2
15	RCL 5	35	STO − 6
16	×	36	RCL 4
17	RCL 7	37	STO 2
18	x< 0	38	STO + 6
19	GTO 45	39	STO + 6
20	x≠ 0	40	RCL 0
21	GTO 30	41	STO + 3
22	e^x	42	RCL 6
23	STO 7	43	RCL 3
24	R↓	44	GTO 03
25	STO 6	45	STO − 7
26	RCL 4	46	R↓
27	RCL 3	47	RCL 6
28	STO 1	48	+
29	GTO 03	49	STO 4

0	h
1	x_{k-1}
2	y_{k-1}
3	x_k
4	y_k
5	$h^2/12$
6	$\Sigma, \hat{y}_{k+1}$
7	señal

Teoría

- para resolver la ecuación de 2º orden

$$y'' = F(x,y) \qquad \text{con 2 condiciones}$$

se emplea el método de Numerov :

- predictor ⇒ $\hat{y}_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + \frac{h^2}{12}\left(10F_k + F_{k-1}\right)$

- corrector ⇒ $y_{k+1} = \hat{y}_{k+1} + \frac{h^2}{12} F_{k+1}$

hacen falta 2 valores iniciales (x_0, y_0), (x_1, y_1) espaciados h

Características

- ningún registro libre
- 12 pasos para F(x,y), con x en X, y en Y
- presenta y_k sucesivas, con y_k STO 4, x_k STO 3
- 4-5 cifras de precisión con $h = 0.1$
- puede usarse en reversa, como comprobación

Utilización

- almacenar constantes y valores iniciales
  - h STO 0 (una vez por caso, si se cambia)
  - $h^2/12$ STO 5 (" " " " " " ")
  - 0 STO 7 (una única vez)
  - x_0 STO 1 , x_1 STO 3
  - y_0 STO 2 , y_1 STO 4

- definir F(x,y)

  GTO 02 $\boxed{F(x,y)}$ $\boxed{GTO\ 15}$, PRGM

- calcular valores sucesivos

  $\boxed{R/S} \longrightarrow y_2$ (x_2 en R_3)

  – –

  $\boxed{R/S} \longrightarrow y_n$ (x_n en R_3)

Ejemplos

1 ≡ Resolver $y'' = x + y$ com $y(0) = 1$, $y(0.1) = 1.10534$

- $h = 0.1$ STO 0 , $h^2/12$ STO 5 , 0 STO 7
- $x_0 = 0$ STO 1 , $y_0 = 1$ STO 2
- $x_1 = 0.1$ STO 3 , $y_1 = 1.10534$ STO 4

- se define $F(x,y)$ ≑ GTO 02 $\boxed{+}$ $\boxed{\text{STO 15}}$, PRGM
- se calculam valores consecutivos , resulta

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	1.22274	1.35438	1.50258	1.66982	1.85877	2.07233	2.31363	2.58609	2.89344
exacto	igual	igual	igual	igual	igual	2.07234	2.31365	2.58612	2.89348

la solución exacta es $y = \frac{1}{2}(3e^x - e^{-x}) - x$

2 ≡ Resolver $y'' = 2\cos x - y$, com $y(0) = 0$, $y(0.1) = \text{sen } 0.1 / 10$

- almacenando los valores iniciales = $h = 0.1$ STO 0
- se define $F(x,y)$

GTO 02 $\boxed{\cos}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{x \rightleftharpoons y}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{STO 15}}$, PRGM

- calculando valores : (sólo se reseñan la mitad)

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
y	0.039735	0.15578	0.33880	0.57392	0.84151	1.11850	1.37969	1.59938	1.75298	1.81863
exacto	0.039734	0.15577	0.33879	0.57388	0.84147	1.11845	1.37963	1.59932	1.75293	1.81859

la solución es $y = x \text{ sen } x$

3 ≡ Resolver $y'' = 5x + y + 2$, com $y(1) = -6,72817$, $y(0.9) = -6,25404$

- se almacenan valores iniciales , $h = -0.1$ sto 0
- se define $F(x,y)$ ≑ GTO 02 $\boxed{5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{+}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{\text{STO 15}}$

- calculando valores = (sólo señalados la mitad)

x	0.8	0.6	0.4	0.2	0	−0.2	−0.4	−0.6	−0.8	−1
y	−5,77745	−4,81779	−3,85082	−2,87786	−1,90001	−0,91814	−0,06702	1,05487	2,04491	3,03676
exacto	igual	igual	igual	igual	−1,90000	−0,91813	0,06703	1,05488	2,04493	3,03679

la solución es $y = 0.1e^x - 5x - 2$

Integrales definidas = $\int_a^b y(x)\,dx$

1	STO 2	31	$x<0$
2	$x \rightleftarrows y$	32	GTO 35
3	STO + 2	33	CHS
4	−	34	GTO 07
5	STO 1	35	CHS
6	RCL 4	36	1
7	STO 0	37	$x = y$
8	RCL 1	38	GTO 43
9	×	39	5
10	RCL 2	40	STO × 7
11	+	41	R↓
12	2	42	GTO 07
13	÷	43	RCL 7
14	STO 3	44	STO − 7
15	y(x)	45	1
#	GTO 29	46	2
#		47	÷
29	STO + 7	48	RCL 1
30	RCL 0	49	×

0	prueba
1	b − a
2	b + a
3	x_m
4	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
7	Σ

Teoría

- la integral en el intervalo [a, b]

$$\int_a^b y(x)\,dx$$

se transforma en el [1, −1] mediante el cambio

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \quad , \quad dx = \frac{b-a}{2}\,dt$$

- y la resultante se calcula mediante la fórmula

$$\int_{-1}^{1} y(x)\,dx = \frac{5}{6}\left[y\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + y\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right] + \frac{1}{6}\left[y(1) + y(-1)\right]$$

que es exacta para $y(x) =$ polinomio de grado $n \leq 5$

Características

- exacta para polinomios hasta de 5º grado
- 14 pasos para definir $y(x)$, con x en pantalla y R_3
- 2 registros libres = R_5, R_6
- no precisa cambios de variable

Utilización

- previamente, $\frac{1}{\sqrt{5}}$ STO 4, 0 STO 7 (una única vez ambas cosas)
- definir $y(x)$ c/ x en X y R_3

GTO 14, $\boxed{y(x)}$ $\boxed{\text{GTO } 29}$, PRGM

- calcular la integral

a ↑

b $\boxed{R/S}$ ⟶ $\int_a^b y(x)\,dx$

- para otro intervalo, introducirlo y R/S

Ejemplos

1 ≡ Calcular la integral $\int_0^1 \frac{x}{e^x}\,dx$ aproximadamente

- previamente, $\frac{1}{\sqrt{5}}$ STO 4, 0 STO 7
- se define $y(x)$ ≡ GTO 14 $\boxed{\uparrow}\boxed{e^x}\boxed{\div}\boxed{GTO\ 29}$, PRGM
- se calcula la integral ≡

$$\begin{matrix} 0\ \uparrow \\ 1 \end{matrix}\ \boxed{R/S} \longrightarrow I = \underline{0{,}26424} \quad \left(\text{exacto},\ 1-\frac{2}{e} = 0{,}26424\right)$$

2 ≡ Calcular la integral $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x e^x}$

- se define $y(x)$ ≡ GTO 14 $\boxed{\uparrow}\boxed{e^x}\boxed{\times}\boxed{1/x}\boxed{GTO\ 29}$, PRGM
- se calcula por intervalos ≡ resulta

(1 − 2) =	0.17052 ,	(6 − 7) =	0.00024
(2 − 3) =	0.03585 ,	(7 − 8) =	0.00008
(3 − 4) =	0.00927 ,	(8 − 9) =	0.00003
(4 − 5) =	0.00263 ,	(9 − 10) =	0.00001
(5 − 6) =	0.00079 ,	(10 − 11) =	0 con 5 cifras

el total es $I = (1-\infty) \simeq \underline{0{,}21942}$ (exacto, 0.21938)

3 ≡ Calcular la integral $\int_{\sqrt{\pi}}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x+7}}$ lo más aproximado posible

- se define ≡ GTO 14 $\boxed{x^2}\boxed{3}\boxed{\times}\boxed{RCL3}\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{+}\boxed{7}\boxed{+}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{RCL3}\boxed{\times}\boxed{1/x}\boxed{GTO\ 29}$, PRGM
- calculamos:

$$\begin{matrix} \sqrt{\pi}\ \uparrow \\ e \end{matrix}\ \boxed{R/S} \longrightarrow I \simeq \underline{0.084145}$$ con 6 decimales exactos.

- si queremos mayor precisión, calculando 3 intervalos:

$$\left\{\begin{array}{l} (\sqrt{\pi} - 2{,}08) = 0{,}0341887275 7 \\ (2{,}08 - 2{,}4) = 0{,}02782875885 \\ (2{,}4 - e) = 0{,}02212722828 \end{array}\right\} \quad I = \underline{0{,}0841447147} \quad \text{exacto}$$

≡ la integral exacta es $I = -\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{Ln}\left[\frac{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3x^2+2x+7}+2x+14}{x}\right]\Bigg|_{\sqrt{\pi}}^{e} =$

$= 0{,}0841447147$ con 10 cifras

Funciones hiperbólicas : Sh x, Ch x, Th x, e inversas

1	e^x	23	x⇄y
2	↑	24	→P
3	1/x	25	LAST X
4	−	26	+
5	2	27	LN
6	÷	28	GTO 00
7	GTO 00	29	↑
8	e^x	30	x^2
9	↑	31	1
10	1/x	32	−
11	+	33	√
12	GTO 05	34	GTO 26
13	e^x	35	1
14	↑	36	x⇄y
15	↑	37	+
16	1/x	38	1
17	−	39	LAST X
18	x⇄y	40	−
19	LAST X	41	÷
20	+	42	√
21	GTO 06	43	GTO 27
22	1		

Teoría

- se calculan las f. hiperbólicas según definición

$$Sh\,x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad , \quad Arg\,Sh\,x = Ln\,(x + \sqrt{x^2+1})$$

$$Ch\,x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad , \quad Arg\,Ch\,x = Ln\,(x + \sqrt{x^2-1})$$

$$Th\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad , \quad Arg\,Th\,x = Ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Características

- todos los registros libres
- gran rapidez

Utilización

- para Sh x ⇒ x $\boxed{R/S}$ → Sh x $(-\infty < x < \infty)$
- para Ch x ⇒ x GTO 08 $\boxed{R/S}$ → Ch x $(-\infty < x < \infty)$
- para Th x ⇒ x GTO 13 $\boxed{R/S}$ → Th x. $(-\infty < x < \infty)$

- para Arg Sh x ⇒ x GTO 22 $\boxed{R/S}$ → Arg Sh x $(-\infty < x < \infty)$
- para Arg Ch x ⇒ x GTO 29 $\boxed{R/S}$ → Arg Ch x $(1 \leq x < \infty)$
- para Arg Th x ⇒ x GTO 35 $\boxed{R/S}$ → Arg Th x $(-1 < x < 1)$

Ejemplos

Sh π = 11.54873936 ⇒ Arg Sh 11.54873936 = 3.141592654

Ch π = 11.59195328 ⇒ Arg Ch 11.59195328 = 3.141592654

Th π = 0.9962720761 ⇒ Arg Th 0.9962720761 = 3.141592638

Sh e = 7.544137095 ⇒ Arg Sh 7.544137095 = 2.718281828

Ch e = 7.610125135 ⇒ Arg Ch 7.610125135 = 2.718281828

Th e = 0.9913289153 ⇒ Arg Th 0.9913289153 = 2.718281799

Integral de logaritmo, $I\ell(x) = \int_1^x \frac{e^x}{x}\,dx$

1	STO 0	19	$x \neq y$
2	STO 1	20	GTO 06
3	2	21	RCL 0
4	STO 2	22	LN
5	R↓	23	+
6	RCL 1	24	1
7	RCL 0	25	.
8	×	26	3
9	RCL 2	27	1
10	x^2	28	7
11	÷	29	9
12	RCL 2	30	0
13	1	31	2
14	STO + 2	32	1
15	−	33	5
16	×	34	2
17	STO 1	35	−
18	+	36	GTO 00

0	x
1	Tm
2	m

Teoría

- por un desarrollo de Taylor

$$I\ell(x) = \int_1^x \frac{e^x}{x}\,dx = \ln x - c + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \cdots + \frac{x^m}{m\cdot m!} + \cdots$$

donde $c = 1.317902152$

Características

- 5 registros libres
- para $x > 0$
- calcula sumas parciales, y se detiene cuando dos consecutivas son iguales

tiempo = hasta $x = 10$, 30 sg.

Utilización

x $\boxed{R/S}$ ⟶ $I\ell(x)$

Ejemplos

$I\ell(0.5) = -1.440897912$

$I\ell(1) = 0$

$I\ell(\pi) = 9.033256578$

$I\ell(10) = 2490.333858$

Integrales de seno y coseno, $Is(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, $Ic(x) = \int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$

1	RCL 4	26	RCL 2
2	$x<0$	27	÷
3	GTO 45	28	+
4	R↓	29	$x \neq y$
5	STO 3	30	GTO 13
6	1	31	RCL 4
7	STO 2	32	$x \geq 0$
8	R↓	33	GTO 49
9	x^2	34	×
10	CHS	35	RCL 0
11	STO 1	36	−
12	RCL 3	37	RCL 1
13	RCL 1	38	CHS
14	RCL 2	39	$\sqrt{\ }$
15	1	40	LN
16	+	41	−
17	÷	42	RCL 4
18	LAST X	43	−
19	1	44	GTO 00
20	+	45	CHS
21	STO 2	46	STO 3
22	÷	47	CLX
23	RCL 3	48	GTO 07
24	×	49	R↓
25	STO 3		

0	γ
1	$-x^2$
2	1, 0
3	x, 1
4	señal

Teoría

$$Is(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)(2m+1)!} + \cdots$$

$$Ic(x) = -\gamma - \operatorname{Ln} x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \frac{x^6}{6\cdot 6!} - \frac{x^8}{8\cdot 8!} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}\cdot x^{2m}}{2m\,(2m)!} + \cdots$$

donde $\gamma = 0.5772156649$

Características

- calcula sumas parciales, y se detiene cuando dos consecutivas son iguales
- 3 registros libres
- para $Is(x)$, x cualquiera; $Ic(x)$, $x > 0$ } pierde precisión al crecer x
- calcula $Is(x)$ ó bien $Ic(x)$ mediante una señal en R_4
- tiempo, para $x = 10$, 25 sg.

Utilización

- previamente, almacenar γ STO 0
- para $Is(x)$ ⇒ almacenar señal 1 STO 4

  x [R/S] ⟶ $Is(x)$

- para $Ic(x)$ ⇒ almacenar señal −1 STO 4

  x [R/S] ⟶ $Ic(x)$

la señal no cambia si no es alterada por el usuario

Ejemplos

$Is(1) = 0.946083070$, $Ic(1) = -0.3374039229$

$Is(2) = 1.605412977$, $Ic(2) = -0.422980829$

$Is(10) = 1.658347574$, $Ic(10) = 0.045456348$

$Is(\pi) = 1.851937082$, $Ic(\pi) = -0.073667912$

Integrales de Fresnell, $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen} x^2\,dx$, $C(x) = \int_0^x \cos x^2\,dx$

1	CHS	23	+
2	STO 0	24	÷
3	CHS	25	RCL 2
4	x^2	26	3
5	LASTX	27	+
6	×	28	÷
7	STO × 0	29	RCL 2
8	RCL 3	30	4
9	x<0	31	+
10	GTO 41	32	÷
11	R↓	33	4
12	3	34	STO + 2
13	STO 2	35	×
14	÷	36	STO 1
15	STO 1	37	+
16	RCL 1	38	x=y
17	RCL 0	39	GTO 00
18	RCL 2	40	GTO 16
19	×	41	LASTX
20	×	42	1
21	RCL 2	43	GTO 13
22	1		

0	$-x^4$
1	T_m
2	$m, m+3, \ldots$
3	± 1

Teoría

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{x^3}{3.1!} - \frac{x^7}{7.3!} + \frac{x^{11}}{11.5!} - \frac{x^{15}}{15.7!} + \cdots + (-1)^{m+1}.\frac{x^{4m-1}}{(4m-1)(2m-1)!} + \cdots$$

$$C(x) = \int_0^x \cos x^2\,dx = x - \frac{x^5}{5.2!} + \frac{x^9}{9.4!} - \frac{x^{13}}{13.6!} + \cdots + (-1)^m.\frac{x^{4m+1}}{(4m+1)(2m)!} + \cdots$$

Características

- para todo x
- pierde precisión al crecer x
- 4 registros libres
- Calcula sumas parciales y se detiene cuando se igualan

para $x = 3$, unos 35 segundos.

Utilización

- para $S(x)$, almacenar señal, 1 STO 3

x $\boxed{R/S}$ ⟶ $S(x)$

- para $C(x)$, almacenar señal, −1 STO 3

x $\boxed{R/S}$ ⟶ $C(x)$

la señal no cambia si no es de intento

Ejemplos

$S(1) = 0.3102683017$, $C(1) = 0.9045242379$

$S(-1) = -0.3102683017$, $C(-1) = -0.9045242379$

$S(0.5) = 0.04148102428$, $C(0.5) = 0.4968840292$

$S(3) = 0.7735624623$, $C(3) = 0.7028636565$

$S(1/e) = 0.01657399062$, $C(1/e) = 0.3672062175$

$S(0) = 0$, $C(0) = 0$

Integral elíptica incompleta de 1ª especie, $F(\alpha,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$

1	STO 0	22	2
2	x⇄y	23	STO÷0
3	SIN	24	R↓
4	STO 1	25	R↓
5	STO 2	26	STO 1
6	√	27	STO÷2
7	2	28	RCL 3
8	×	29	x⇄y
9	RCL 1	30	x<y
10	1	31	GTO 06
11	TAN	32	TAN⁻¹
12	TAN⁻¹	33	RCL 0
13	STO 3	34	2
14	+	35	÷
15	÷	36	+
16	RCL 0	37	TAN
17	SIN	38	LN
18	RCL 1	39	RCL 2
19	×	40	√
20	SIN⁻¹	41	÷
21	STO+0	42	GTO 00

0	$\varphi_0, \varphi_1 \cdots$
1	$k_0, k_1 \cdots$
2	$\frac{k}{k_1 k_2 \cdots k_m}$
3	~ 1

Teoría

- se utiliza el método de Landen

para calcular $F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$, se hallan:

$$\begin{cases} k_m = \dfrac{2\sqrt{k_{m-1}}}{1+k_{m-1}}, & \text{con } k_0 = k = \operatorname{sen}\alpha \\[2ex] \varphi_m = \dfrac{\operatorname{arcsen}(k_{m-1} \cdot \operatorname{sen}\varphi_{m-1}) + \varphi_{m-1}}{2}, & \text{con } \varphi_0 = \varphi \end{cases}$$

y cuando $k_m \sim 1$, la integral es

$$F(k,\varphi) = K \ln \operatorname{tg}\left[\operatorname{arctg} 1 + \frac{\Phi}{2}\right]$$

siendo $K = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\frac{k_1 k_2 \cdots k_m}{k}}$

$$\Phi = \lim_{m\to\infty} \varphi_m$$

- k se proporciona como $k = \operatorname{sen}\alpha$, desde luego $|k| \leq 1$

Características

- preferentemente en grados decimales, tiempo, alrededor de 20 sg.
- 4 registros libres, ~ 1 en R_3
- no debe ser $\alpha = 0$ ni $\varphi = 0$, pero sí $\alpha = \varphi = 10^{-10}$, ni $\varphi = 90$

Utilización, g DEG

α ↑ φ $\boxed{R/S}$ ⟶ $F(\alpha,\varphi)$

Ejemplos

$F(15, 63) = 1.111511315$, $F(90, 89'9) = 7,043957217$

$F(85, 90) = 3.831742107$, $F(45, 45) = 0,826017880$

$F(10^{-10}, 1) = 0.01745329648$, $F(30, 27) = 0,4755106788$

$F(10^{-9}, 5) = 0.08726644911$, $F(27, 30) = 0,5283799413$

$F(10^{-9}, 90) = 1,570796329$, $F(63, 15) = 0,2641993708$

Integral de los errores , $fer(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\,dx$

1	STO 1	17	2
2	x^2	18	−
3	CHS	19	×
4	STO 0	20	2
5	3	21	STO +2
6	STO 2	22	×
7	RCL 1	23	STO 1
8	RCL 1	24	+
9	RCL 0	25	$x \neq y$
10	×	26	GTO 08
11	RCL 2	27	2
12	x^2	28	×
13	LASTX	29	π
14	−	30	$\sqrt{\ }$
15	÷	31	÷
16	RCL 2	32	GTO 00

0	$-x^2$
1	Tm
2	m

Teoría

$$fer(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)\,m!} + \cdots \right)$$

Características

- calcula sumas parciales, se detiene cuando dos son iguales
- 5 registros libres
- a partir de $x = 4{,}3 \Rightarrow fer(x) \simeq 1$ con 10 cifras
- para $x > 3$ pierde precisión rápidamente

  tiempo = hasta $x = 3$, 46 sg.

Utilización

x $\boxed{R/S}$ $\longrightarrow$ $fer(x)$

si se desea $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 1 - fer(x)$

Ejemplos

fer (0.5) = 0.5204998777

fer (π) = 0.9999912319

fer (1) = 0.8427007926

fer (0.5951160813) = 0.6

fer (−0.1) = −0.1124629160

fer (−1) = −0.8427007926

Distribución normal. $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

1	↑	21	↑
2	STO 6	22	↑
3	×	23	↑
4	2	24	RCL 5
5	÷	25	×
6	CHS	26	RCL 4
7	e^x	27	+
8	π	28	×
9	2	29	RCL 3
10	×	30	+
11	√	31	×
12	÷	32	RCL 2
13	STO 7	33	+
14	NOP	34	×
15	RCL 0	35	RCL 1
16	RCL 6	36	+
17	×	37	×
18	1	38	RCL 7
19	+	39	×
20	1/x	40	GTO 00

0	0.2316419
1	0.31938153
2	-0.3565637-
3	1.7814779-
4	-1.8212559-
5	1,3302744-
6	×
7	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Teoría

– la distribución normal viene dada por

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

– el programa calcula una aproximación polinómica

$$Q(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (at + bt^2 + ct^3 + dt^4 + et^5) + \varepsilon$$

donde $t = \frac{1}{1 + 0.2316419x}$

$a = 0.31938153$ $\quad$ $d = -1.821255978$

$b = -0.356563782$ $\quad$ $e = 1.330274429$

$c = 1.781477937$

y $|\varepsilon| < 7.5 \cdot 10^{-8}$, exactitud de 7 decimales

Características

– gran rapidez, para $x \geq 0$

– si se desea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, está en R_7

Utilización

almacenar constantes en R_0 a R_5, [FIX 7]

x [R/S] $\longrightarrow$ $Q(x)$

– para hallar $Q(-x)$, empléese $Q(-x) = 1 - Q(x)$

Ejemplos

$Q(0) = 0,5\,000\,000$	$Q(e) = 0,0032811$
$Q(1) = 0,1586553$	$Q(\pi) = 0,000\,8402$
$Q(2) = 0,0227501$	$Q(\pi/e) = 0,1238964$
$Q(3) = 0,0013\,500$	$Q(1.281552) = 0,1\,000\,000$
$Q(4) = 0,00\,00\,317$	$Q(0.1234567) = 0,4508727$
$Q(5) = 0,000\,000\,3$	$Q(\sqrt{2}) = 0.0786497$

Distribución normal inversa, $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx$

1	x^2	26	+
2	1/x	27	RCL 6
3	LN	28	÷
4	√	29	−
5	↑	30	STO 6
6	↑	31	1
7	↑	32	•
8	RCL 5	33	5
9	×	34	RCL 6
10	RCL 4	35	x<y
11	+	36	GTO 49
12	×	37	3
13	RCL 3	38	•
14	+	39	2
15	×	40	x<y
16	1	41	GTO 49
17	+	42	0
18	STO 6	43	•
19	CLX	44	0
20	RCL 2	45	0
21	×	46	0
22	RCL 1	47	3
23	+	48	STO − 6
24	×	49	RCL 6
25	RCL 0		

0	2.515517
1	0.802853
2	0.010328
3	1.432788
4	0.189269
5	0.001308
6	usado.

Teoría

- en la distribución normal

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

dada Q, $0 < Q \leq 0{,}5$, el programa calcula x

- se utiliza una aproximación racional

$$x = t - \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}{1 + b_0 t + b_1 t^2 + b_2 t^3} + \varepsilon$$

donde

$$t = \sqrt{\ln \frac{1}{Q^2}} \quad , \quad |\varepsilon| < 4{,}5 \cdot 10^{-4}, \text{ 5 cifras decimales}$$

y

$a_0 = 2.515517$ $\quad b_0 = 1.432788$

$a_1 = 0.802853$ $\quad b_1 = 0.189269$

$a_2 = 0.010328$ $\quad b_2 = 0.001308$

Características

- gran rapidez, para $0 < Q \leq 0{,}5$
- incluye sub-programa de mejora

Utilización, almacenar constantes en R_0 a R_5, FIX 4

$$Q \ \boxed{R/S} \longrightarrow x(Q)$$

Ejemplos

$x(0.5) = -1.02 \cdot 10^{-7}$	$x(0.0032811) = 2.7184$
$x(0.1586553) = 1.0000$	$x(0.0008402) = 3.1416$
$x(0.0227501) = 2.0001$	$x(0.1238964) = 1.1558$
$x(0.00135) = 3.0000$	$x(0.1) = 1.2817$
$x(0.0000317) = 3.9998$	$x(0.4508727) = 0.1232$
$x(0.0000003) = 4.9910$	$x(0.0786497) = 1.4145$

Factoriales exactos $2 \leq x \leq 69$

1	↑	7	−
2	1	8	$x \neq y$
3	STO 0	9	GTO 05
4	$x \rightleftharpoons y$	10	RCL 0
5	STO × 0	11	GTO 00
6	1		

0	$x!$

Teoría

$$x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-1) \cdot x$$

Características

- para x entero $2 \leq x \leq 69$
- tiempo máximo = 20 sg. para $69!$

Utilización

x $\boxed{R/S}$ ⟶ $x!$

Ejemplos

$57! = 4.052691950 \cdot 10^{76}$, $20! = 2.432902008 \cdot 10^{18}$

$69! = 1.711224522 \cdot 10^{98}$, $8! = 40320$

Combinaciones $_mC_n = \dfrac{m!}{(m-n)!\,n!} = \binom{m}{n}$

1	−	17	$x \rightleftharpoons y$
2	LAST X	18	$x \geq y$
3	$x < y$	19	GTO 22
4	$x \rightleftharpoons y$	20	RCL 2
5	STO 0	21	GTO 00
6	1	22	$x \rightleftharpoons y$
7	STO 1	23	RCL 0
8	+	24	+
9	STO 2	25	RCL 1
10	R↓	26	÷
11	$x = 0$	27	STO × 2
12	GTO 30	28	R↓
13	1	29	GTO 13
14	RCL 1	30	1
15	+	31	GTO 00
16	STO 1		

Teoría

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \frac{m-n+1}{1} \cdot \frac{m-n+2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{m}{n}$$

Características

- $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$, $\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m$
- $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$,
- para m, n enteros

Utilización

m ↑ n $\boxed{R/S}$ ⟶ $\binom{m}{n}$

Ejemplos

$\binom{73}{4} = 1088430$, $\binom{53}{35} = 6.461756572 \cdot 10^{13}$

$\binom{43}{3} = 12341$, $\binom{20}{10} = 184756$

$\binom{10}{5} = 252$, $\binom{96}{69} = 5.322073448 \cdot 10^{23}$

Permutaciones ó variaciones, $_mP_n = \frac{m!}{(m-n)!}$

1	RCL 1	23	GTO 26
2	RCL 1	24	R↓
3	RCL 2	25	GTO 15
4	x = 0	26	R↓
5	GTO 29	27	R↓
6	x = y	28	GTO 00
7	GTO 31	29	1
8	x ≥ y	30	GTO 00
9	GTO 39	31	1
10	1	32	−
11	x = y	33	x = 0
12	GTO 41	34	GTO 37
13	R↓	35	STO × 1
14	−	36	GTO 31
15	1	37	RCL 1
16	+	38	GTO 00
17	×	39	0
18	LAST X	40	÷
19	RCL 1	41	R↓
20	1	42	R↓
21	−	43	GTO 00
22	x = y		

1	m
2	n

Teoría

$$_mP_n = \frac{m!}{(m-n)!} = m(m-1)\cdots(m-n+1)$$

Características

- para m, n, enteros positivos, $n \leq m$
- $_mP_0 = 1$, $_mP_1 = m$, $_mP_m = m!$

Utilización

- almacenar m, n

  m STO 1

  n STO 2 $\boxed{R/S} \longrightarrow$ $_mP_n$

Ejemplos

$_{43}P_3 = 74046$ $\qquad$ $_{69}P_0 = 1$

$_{73}P_4 = 26122320$ $\qquad$ $_{69}P_{69} = 69! = 1.7112245 \cdot 10^{98}$

$_{69}P_1 = 69$

Ajuste por mínimos cuadrados

1	NOP	25	RCL 7
2	↑	26	×
3	x^2	27	CHS
4	STO+2	28	RCL 4
5	R↓	29	+
6	x⇄y	30	RCL 3
7	NOP	31	÷
8	Σ+	32	NOP
9	GTO 0 0	33	STO 0
10	RCL 5	34	RCL 1
11	RCL 7	35	x⇄y
12	RCL 4	36	R/S
13	×	37	x⇄y
14	RCL 3	38	R↓
15	÷	39	×
16	−	40	RCL 2
17	RCL 6	41	RCL 4
18	RCL 7	42	x^2
19	x^2	43	RCL 3
20	RCL 3	44	÷
21	÷	45	−
22	−	46	÷
23	÷	47	GTO 0 0
24	STO 1	48	

0	a
1	b
2	Σy^2
3	m
4	Σy
5	Σxy
6	Σx^2
7	Σx

Teoría

- se calculan los siguientes parámetros

$$b = \frac{\Sigma xy - \frac{\Sigma x \Sigma y}{m}}{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{m}} \quad , \quad a = \frac{\Sigma y - b\Sigma x}{m}$$

y resulta una recta,

$$y = a + bx$$

- se calcula el coeficiente de correlación $0 \leq r^2 \leq 1$

$$r^2 = \frac{\left[\Sigma xy - \frac{\Sigma x \Sigma y}{m}\right]^2}{\left[\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{m}\right]\left[\Sigma y^2 - \frac{(\Sigma y)^2}{m}\right]}$$

Características

- en principio está adaptado para calcular la recta de regresión de y sobre x, $y = a + bx$

- pero se pueden adoptar las siguientes variantes

Línea

01	NOP	LN	NOP	LN
07	NOP	NOP	LN	LN
32	NOP	e^x	NOP	e^x
	recta	c. exponencial	c. logarítmica	c. potencial
	$y = a + bx$	$y = ae^{bx}$	$y = a + b\,Lx$	$y = ax^b$

Utilización

- introducir los puntos , f REG , f PRGM

  x_i ↑

  y_i $\boxed{R/S}$ ⟶ i

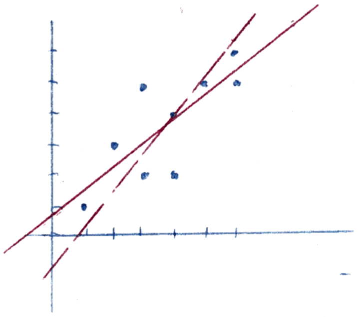
- cuando estén todos, GTO 1 0

  $\boxed{R/S}$ ⟶ a $\boxed{x⇄y}$ ⟶ b $\boxed{R/S}$ ⟶ r^2

- si r^2 no está cerca de 1, el ajuste no es bueno, o hay dispersión

Ejemplos

- $1 \equiv$ Ajustar una recta al conjunto de puntos. Predecir $y(0)$, $y(1,5)$



X	1	2	3	3	4	4	5	6	6
Y	1	3	2	5	2	4	5	5	6

- se introducen los puntos, STO 10 $\boxed{R/S} \to a$ $\boxed{x \rightleftarrows y} \to b$ $\boxed{R/S}$ r^2

- resulta ser la recta de regresión $\Rightarrow$ $y = 0,73 + 0,78x$

con $r^2 = 0,59$, mucha dispersión

predicciones $\Rightarrow$ $y(0) \Rightarrow 0$ $\boxed{RCL\ 1}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{RCL\ 0}$ $\boxed{+} \longrightarrow 0,73$

$y(1,5) \Rightarrow 1.5$ $\boxed{RCL\ 1}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{RCL\ 0}$ $\boxed{+} \to 1.89$

la recta aparece en línea seguida

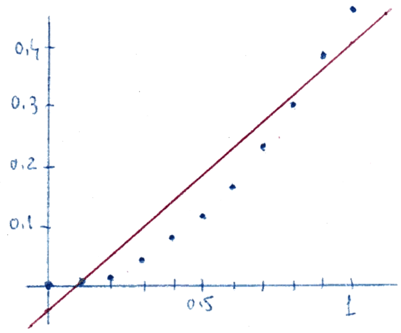
- si se desea hallar la recta de regresión de x sobre y, una vez hallada la anterior.

- púlsese $\boxed{RCL\ 4}$ $\boxed{RCL\ 2}$ $\boxed{RCL\ 6}$ $\boxed{RCL\ 7}$ $\boxed{STO\ 4}$ $\boxed{R\downarrow}$ $\boxed{STO\ 2}$ $\boxed{R\downarrow}$ $\boxed{STO\ 6}$ $\boxed{R\downarrow}$ $\boxed{STO\ 7}$ $\boxed{GTO\ 10}$

- $\boxed{R/S} \longrightarrow a = 0.98$, $\boxed{\cancel{R/S}} \to b = 0.76$ $\boxed{R/S} \longrightarrow r^2 = 0,59$

la recta es $x = 0.98 + 0.76y$, aparece en línea de trazos

- $2 \equiv$ ajustar una función adecuada a los datos siguientes. Predecir $y(\frac{1}{4})$, $y(\frac{3}{4})$



X	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Y	0	0.005	0.02	0.045	0.079	0.12	0.17	0.24	0.30	0.38	0.46

= versión recta, NOP NOP, NOP

$y = -0.07 + 0.47x$, $r^2 = 0.94$

predicción = $y(\frac{1}{4}) = 0.05$, $y(\frac{3}{4}) = 0.28$

= versión curva exponencial

$y = 0.0083\, e^{4,51x}$, $r^2 = 0.90$

predicción $\Rightarrow$ $y(\frac{1}{4}) = 0,026$, $y(\frac{3}{4}) = 0,24$

= versión curva potencial

$y = 0.47\, x^{1,964}$, $r^2 = 0.9999$

predicción $\Rightarrow$ $y(\frac{1}{4}) = 0.031$, $y(\frac{3}{4}) = 0,27$

= la mejor resulta ser la curva potencial, con $r^2 = 0,9999$

la verdadera $y = 1 - \cos x$, de donde $y(0,25) = 0.031 \Rightarrow \hat{y}(0,25) = 0.031$

$y(0.75) = 0.268 \Rightarrow \hat{y}(0.75) = 0.267$

= la función potencial se ha aproximado mucho a y